

第1章 质点运动学

1、D 2、C 3、C 4、A 5、C 6、B 7、C 8、C 9、C 10、D

二、填空题

1、 $2\sqrt{73}$

2、 $x = \frac{1}{2}At^2 + \frac{1}{6}Bt^3$

3、 $5\sqrt{69}$

4、 $R\vec{i} - R\vec{j}$; $\sqrt{2}R$; $\frac{\pi R}{2}$; $v\vec{i} + v\vec{j}$; $\sqrt{2}v$; 0 。

5、10m

6、225km/h

7、 $y = 19 - \frac{x^2}{2}$; $4\vec{i} + 11\vec{j}$; $2\vec{i} - 8\vec{j}$; $2\vec{i} - 4\vec{j}$ 。

8、 $v_0 + \frac{1}{2}kt^2$; $x_0 + v_0t + \frac{1}{6}kt^3$ 。

9、 $2\pi t$; 2π ; $2\pi^2 t^2$; $2\pi\vec{e}_t + 2\pi^2 t^2\vec{e}_n$

10、 $10\pi + \pi$; π ; πR ; $R(10\pi + \pi)^2$ 。

三、简答题

1、矢径即位置矢量，是从坐标原点O指向质点所在处P的有向线段。位移和矢径不同，矢径确定某一时刻质点的位置，位移则描述某段时间内始末质点位置的变化。矢径是相对坐标原点的，位移矢量是相对初始位置的。对于相对静止的不同坐标系来说，位矢依赖于坐标系的选择，而位移则与所选取的坐标系无关。若取初始位置为坐标原点才能够使两者一致。

2、否。质点作匀变速率运动要求切向加速度是恒量，而图中速度方向与加速度方向不断减小，切向加速度在不断增大。

四、计算题

1. 证明：(1) 由题目知： $x = A_1 \cos \omega t$, $y = A_2 \sin \omega t$ ，消去t得轨迹方程：

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1, \text{ 此为椭圆方程。}$$

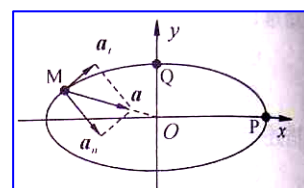
$$(2) \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega A_1 \sin \omega t \vec{i} + \omega A_2 \cos \omega t \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 A_1 \cos \omega t \vec{i} - \omega^2 A_2 \sin \omega t \vec{j} \\ &= -\omega^2 (A_1 \cos \omega t \vec{i} + A_2 \sin \omega t \vec{j}) = -\omega^2 \vec{r} \end{aligned}$$

故 \vec{a} 与 \vec{r} 反向，即加速度指向椭圆中心。

(3) 方法一：

$t=0$ 时， $x=A_1$ ， $y=0$ ，即位于图中 P 点，经过一个时间元 dt ，由 $x=A_1 \cos \omega t$ ， $y=A_2 \sin \omega t$ ，可知 $x>0$ ， $y>0$ ，即该质点位于坐标系第一象限，故可知该质点为逆时针方向转动。



则在 M 点， \vec{a} 与 \vec{v} 夹角为钝角，表明在 M 点切向加速度 \vec{a}_t 的方向与速度 \vec{v} 的方向相反。所以，质点在通过 M 点时速率会减小。

方法二：

$$\text{因为} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega A_1 \sin \omega t \vec{i} + \omega A_2 \cos \omega t \vec{j}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 A_1 \cos \omega t \vec{i} - \omega^2 A_2 \sin \omega t \vec{j}$$

$$\text{而} \quad \vec{a} \cdot \vec{v} = (-\omega^2 A_1 \cos \omega t \vec{i} - \omega^2 A_2 \sin \omega t \vec{j}) \cdot (-\omega A_1 \sin \omega t \vec{i} + \omega A_2 \cos \omega t \vec{j})$$

$$= \omega^3 \sin \omega t \cos \omega t (A_1^2 - A_2^2)$$

由题意知，此时质点在通过图中第二象限的 M 点时，有

$$\sin \omega t > 0, \quad \cos \omega t < 0, \quad \text{且} \quad A_1 > A_2, \quad \omega > 0$$

$$\text{则} \quad \vec{a} \cdot \vec{v} < 0$$

即当质点运动到 M 点时， \vec{a} 与 \vec{v} 夹角为钝角，表明在 M 点切向加速度 \vec{a}_t 的方向与速度 \vec{v} 的方向相反。所以，质点在通过 M 点时速率会减小。

$$2. \text{ 解: (1) } a = \frac{dv}{dt} = A - Bv$$

$$\frac{dv}{A - Bv} = dt$$

$$-\frac{1}{B} \int_0^v \frac{d(A-Bv)}{A-Bv} = \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{A-Bv}{A} = -Bt$$

$$\frac{A-Bv}{A} = e^{-Bt} \Rightarrow v = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})$$

$$(2) \quad v = \frac{dy}{dt} = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt}) \quad , \quad dy = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})dt$$

$$\int_0^y dy = \frac{A}{B} \left[t + \left(\frac{e^{-Bt}}{B} \right) \right] \Big|_0^t$$

$$y = \frac{A}{B} \left[t + \frac{1}{B}(e^{-Bt} - 1) \right]$$

$$y = \frac{A}{B}t + \frac{A}{B^2}(e^{-Bt} - 1)$$

3.解: (1) $y_1 = y_0 + 1.8 + 2t - \frac{1}{2}gt^2$

$$y_2 = y_0 + 2t + 0.1t^2$$

$$(2) \quad y_1 = y_2$$

$$\text{即} \quad y_0 + 1.8 + 2t - \frac{1}{2}gt^2 = y_0 + 2t + 0.1t^2$$

$$\Rightarrow \quad t = 0.6s$$

4.解: 设 x 方向的单位向量 i , y 方向的单位向量 j

$$\text{速度向量 } v = (dx/dt)i + (dy/dt)j = 2i - 4tj$$

$$\text{加速度向量 } a = dv/dt = -4j$$

$$\text{切向的单位向量} = \text{速度方向的单位向量} = (2i - 4tj) / [2^2 + (4t)^2]^{1/2}$$

$$= (i - 2tj) / (1 + 4t^2)^{1/2}$$

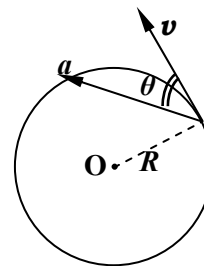
$$\text{切向加速度} = -4j \cdot (i - 2tj) / (1 + 4t^2)^{1/2} = 8t / (1 + 4t^2)^{1/2}$$

$$\text{法向加速度} = (|a|^2 - [8t / (1 + 4t^2)^{1/2}]^2)^{1/2}$$

$$= 4 / (1 + 4t^2)^{1/2}$$

5.解: $a_t = \frac{dv}{dt} \quad a_n = \frac{v^2}{R}$

$$\frac{a_t}{a_n} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{v^2}{R}} = \cot \theta$$



$$\frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{R} \cdot \cot \theta, \quad \frac{R}{\cot \theta} \cdot \frac{dv}{v^2} = dt$$

$$\frac{R}{\cot \theta} \cdot \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = \int_0^t dt, \quad \frac{R}{\cot \theta} \cdot \left(-\frac{1}{v}\right) \Big|_{v_0}^v = t, \quad \frac{R}{\cot \theta} \cdot \left(-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0}\right) = t$$

$$v = \frac{v_0 R}{R - \cot \theta \cdot v_0 t}$$