

前 言

《大学物理教学同步练习题及详解》是大学物理课程的主要辅助教材。完成课外作业是学习过程中的一项重要实践环节,它将帮助学生深入理解物理概念,用活所学知识,培养分析问题和解决问题的能力。

本习题集是在编者长期从事物理教学所积累的大量资料和实践经验的基础上,经过精心编纂而成。它具备以下几个方面的特色:

1. 与教学同步配合。内容新颖,知识点覆盖全面;难易适度,合理搭配;题量多少适当。

2. 题型丰富多样,设问角度多样化。注意对学生综合、类比、联想能力的考察,启发学生多角度开放式思维,注重对学生掌握物理理论、思想及方法的训练。

3. 增设难度系数较大的附加题,题目涉及较多的知识内容,有些是对教材内容的适当延伸。附加题可作为学有余力的同学探讨的较为高级的课题。这样有利于对学生因势利导,使拔尖的优秀人材脱颖而出。附加题可不作为基本要求。

4. 注意物理原理在工程技术中的应用,不少题目来自工程实际问题,培养学生解决实际问题的能力。

5. 重视学科前沿的发展,选题中适当注意引入新概念、新知识,拓宽学生视野。

本习题集编写过程中,得到了西北工业大学应用物理系领导

及全体同仁的支持和帮助,在此,编者谨致谢忱,并欢迎大家在使用过程中提出宝贵意见。

编 者

2000 年 12 月

目 录

第 1 章	质点运动学.....	1
第 2 章	质点动力学	20
第 3 章	刚体力学基础	35
第 4 章	真空中的静电场	50
第 5 章	静电场中的导体和电介质	74
第 6 章	恒定电流的磁场	96
第 7 章	电磁感应与电磁场.....	117
第 8 章	气体动理论.....	136
第 9 章	热力学.....	147
第 10 章	振动	159
第 11 章	波动	174
第 12 章	波动光学	190
第 13 章	狭义相对论	205
第 14 章	量子物理	216

第 1 章 质点运动学

一、选择题

1. 质点在 xOy 平面内作曲线运动, 则质点速率的正确表达式为()。

A. $v = \frac{dr}{dt}$ B. $v = \frac{d|r|}{dt}$ C. $v = \left| \frac{dr}{dt} \right|$
D. $v = \frac{ds}{dt}$ E. $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

2. 质点作匀速圆周运动, 下列各量中恒定不变的量是()。

A. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$ B. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ C. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}$
D. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ E. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ F. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t}$

3. 下列表述中正确的是()。

- A. 质点沿 x 轴运动, 若加速度 $a < 0$, 则质点必作减速运动。
- B. 在曲线运动中, 质点的加速度必定不为零。
- C. 若质点的加速度为恒矢量, 则其运动轨道必为直线。
- D. 当质点作抛体运动时, 其法向加速度 a_n 、切向加速度 a_t 是

不断变化的, 因此 $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ 也是不断变化的。

4. 在离水面高度为 h 的湖岸边上, 有人用绳子拉船靠岸。若人以匀速率 v_0 收绳, 则船在水中的运动为()。

- A. 匀速运动, 且 $v = v_0$
- B. 加速运动, 且 $v > v_0$

C. 加速运动, 且 $v < v_0$

D. 减速运动。

5. 已知质点的运动方程为

$$\begin{cases} x = At\cos\theta + Bt^2\cos\theta \\ y = At\sin\theta + Bt^2\sin\theta \end{cases} \quad \text{式中}$$

A, B, θ 均为恒量, 且 $A > 0, B > 0$, 则质点的运动为()。

A. 一般曲线运动

B. 匀速直线运动

C. 圆周运动

D. 匀减速直线运动

E. 椭圆运动

F. 匀加速直线运动

6. 下列说法中正确的是()。

A. 作曲线运动的物体, 必有切向加速度

B. 作曲线运动的物体, 必有法向加速度

C. 具有加速度的物体, 其速率必随时间改变

7. 在相对地面静止的坐标系内, A, B 两船都以 $2\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速率匀速行驶, A 船沿 x 轴正向, B 船沿 y 轴正向。今在 A 船上设置与静止坐标系方向相同的坐标系(x, y 方向的单位矢量用 i, j 表示), 那么在 A 船上的坐标系中, B 船的速度(以 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 为单位)为()。

A. $2i + 2j$

B. $-2i + 2j$

C. $-2i - 2j$

D. $2i - 2j$

8. 下列各种情况中, 不可能存在的是()。

A. 速率增加, 加速度减小

B. 速率减小, 加速度增大

C. 速率不变而有加速度

D. 速率增大而无加速度

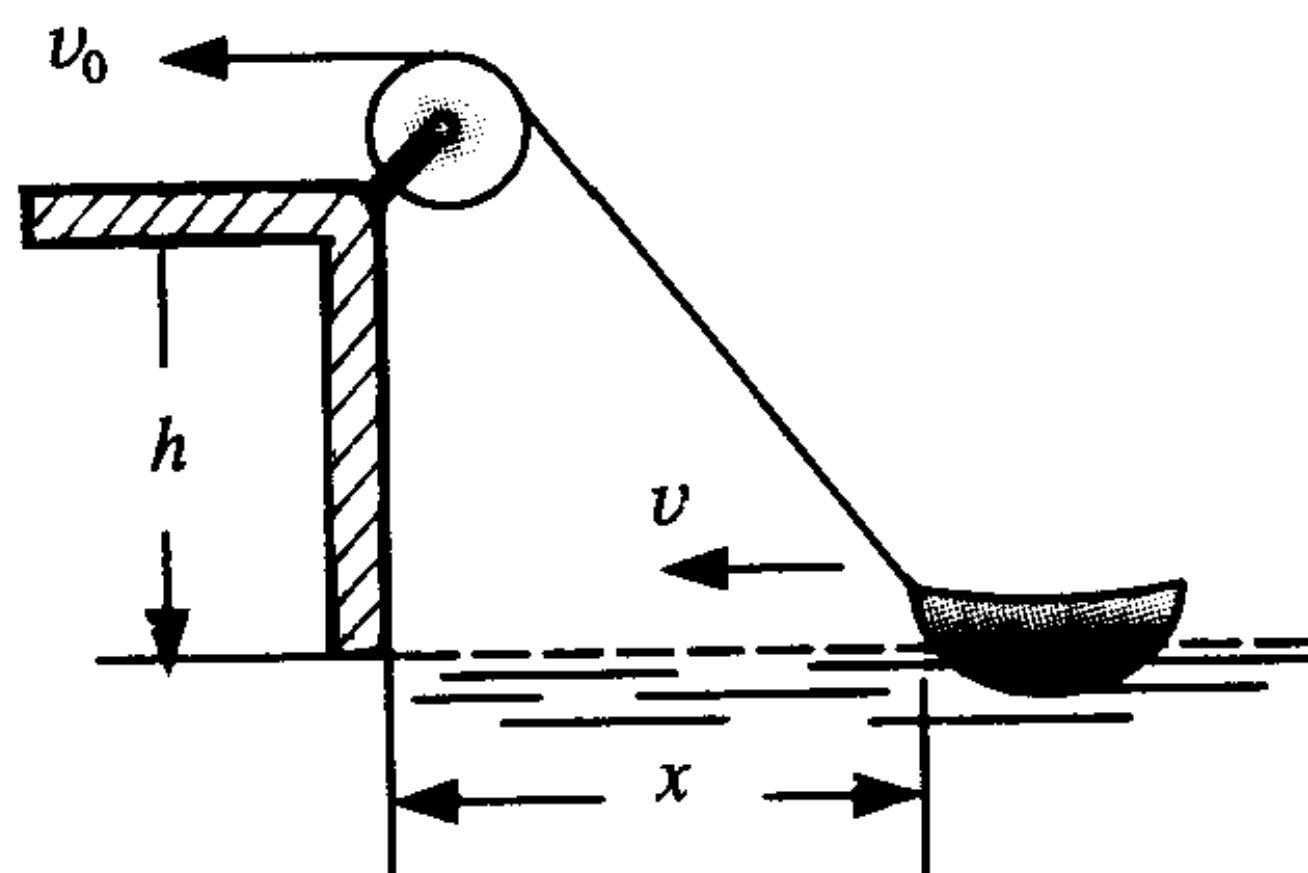


图 1-1

E. 速率增大,而法向加速度的大小不变

9. 一物体作单向直线运动,它在通过两个连续相等位移的平均速度分别为 $\bar{v}_1 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\bar{v}_2 = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。则在整个过程中该物体的平均速度为()。

- A. $12.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ B. $11.75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
C. $12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ D. $13.75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

选择题解答

1. [解] 本题答案为(C, D, E)。

$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, 它的大小 $|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}|$ 等于瞬时速率。 $v = \frac{ds}{dt}$ 为瞬时速率的定义式, 不言而喻, 它是正确的。 $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$ 是二维运动速度沿 x, y 轴的两个分量,

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

即为瞬时速度的大小, 它等于瞬时速率。

2. [解] 本题答案为(A, C, D, F)。

在匀速率圆周运动中, 速率 $v = \text{恒量}$, 半径 $r = \text{恒量}$ 。所以

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \equiv 0$; $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \boldsymbol{v}$, \boldsymbol{v} 的方向是变化的; $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{v}|}{\Delta t} = |\boldsymbol{v}| = v = \text{恒量}$;

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \boldsymbol{a}_t \equiv 0$$

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \boldsymbol{a}$, 本题中 \boldsymbol{a} 即为法向加速度, 其方向是变化的。

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{v}|}{\Delta t} = |\boldsymbol{a}| = a_n = \text{恒量}$$

3. [答] 本题答案为(B)。

判断质点作加速运动还是减速运动,不能只看加速度的正负号。而要由速度 v 和加速度 a 的正负号共同来决定。 v 与 a 同号(同正、同负皆可)为加速运动, v 与 a 异号为减速运动。

在曲线运动中,至少可以肯定速度的方向是变化的,即然速度在变化,那么就必定有加速度。

当 $a = \text{恒矢量}$ 时,质点不一定作直线运动,例如抛体运动,加速度为重力加速度,运动轨道为抛物线。

抛体运动的法向加速度 a_n 、切向加速度 a_t 是不断变化的,但它们的矢量和却是恒定不变的,恒等于重力加速度,即

$$\sqrt{a_n^2 + a_t^2} = g$$

4. [解] 本题答案为(B)。

设船头到滑轮间的绳长为 l , 则

$$x = \sqrt{l^2 - h^2}$$

所以船速

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(l^2 - h^2)^{1/2}$$

$$v = \frac{l}{\sqrt{l^2 - h^2}} \frac{dl}{dt}$$

而

$$l = l_0 - v_0 t$$

所以

$$v = -\frac{l}{x} v_0$$

设绳与水面的夹角为 θ , 则 $\cos\theta = \frac{x}{l}$

故

$$v = -\frac{v_0}{\cos\theta}$$

所以

$$v > v_0$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

而

$$v = -\frac{v_0}{\cos\theta} = -\frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x} v_0$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } a = \frac{dv}{dt} &= - \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x^2} \right] \frac{dx}{dt} v_0 = \\
 &= - \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x^2} \right] v v_0 = \\
 &= - \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x^2} \right] \left[- \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x} v_0 \right] v_0 \\
 a = \frac{dv}{dt} &= - \frac{h^2 v_0^2}{x^3}
 \end{aligned}$$

$v < 0, a < 0, v, a$ 同号, 故船为加速运动。

5. [解] 本题答案为(F)。

质点的运动方程为

$$\begin{cases} x = At \cos \theta + Bt^2 \cos \theta \\ y = At \sin \theta + Bt^2 \sin \theta \end{cases}$$

由此可知

$$\begin{aligned}
 \frac{y}{x} &= \tan \theta \\
 y &= (\tan \theta) x
 \end{aligned}$$

由于 $\theta = \text{恒量}$, 所以上述轨道方程为直线方程。

又

$$\begin{cases} v_x = (A + 2Bt) \cos \theta \\ v_y = (A + 2Bt) \sin \theta \\ a_x = 2B \cos \theta = \text{恒量} \\ a_y = 2B \sin \theta = \text{恒量} \end{cases}$$

由于 $A > 0, B > 0$, 显然 v 与 a 同号, 故质点作匀加速直线运动。

6. [答] 本题答案为(B)。

物体作曲线运动时, 不一定有切向加速度, 例如作匀速圆周运动的物体就只有法向加速度, 而没有切向加速度。

物体具有法向加速度时, 它的运动方向才会改变, 物体才会作曲线运动。没有法向加速度, 物体只能作直线运动。

只有切向加速度才能改变物体运动速度的快慢。当加速度没有切向分量时, 物体的速率恒定不变。

7. [解] 本题答案为(B)。

取地面为基本参照系(k 系), A 船为运动参照系(k' 系), B 船为运动物体。则绝对速度为 $v = 2j$

牵连速度为 $u = 2i$

而相对速度 $v' = v - u = 2j - 2i$

即 $v' = -2i + 2j$

8. [答] 本题答案为(D)。

加速度减小时, 只是速度的改变趋缓, 速率增加是可能的。

速率减小, 说明物体具有切向加速度。切向加速度增大, 速率也可能减小。法向加速度对速率没有影响。法向加速度增大, 从而导致总加速度增大, 但速率减小仍是可能的。

只有法向加速度时, 速率即可保持不变。

速率增大而无加速度是不可能的。只要速度增大, 就一定有切向加速度。

法向加速度对速率没有影响。法向加速度的大小($a_n = v^2/\rho$)不变, 速率增加是可能的, 当 v 增大时, 只要轨道的曲率半径 ρ 作相应的改变, 维持法向加速度的大小 $\frac{v^2}{\rho}$ 不变是可能的。

9. [解] 本题答案为(C)。

根据平均速度的定义

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2}$$

而 $\Delta x_1 = \bar{v}_1 \Delta t_1$, $\Delta x_2 = \bar{v}_2 \Delta t_2$

由于两段位移相等, 即 $\bar{v}_1 \Delta t_1 = \bar{v}_2 \Delta t_2$

由此知 $\Delta t_1 = \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1} \Delta t_2$

所以
$$\bar{v} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{2\Delta x_2}{\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1} \Delta t_2 + \Delta t_2}$$

$$\bar{v} = \frac{2\bar{v}_2\Delta t_2}{(1 + \frac{v_2}{v_1})\Delta t_2} = \frac{2\bar{v}_1\bar{v}_2}{v_1 + v_2}$$

代入数据 $\bar{v}_1 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $v_2 = 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 得

$$\bar{v} = \frac{2 \times 10 \times 15}{10 + 15} = \frac{300}{25} = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

二、填空题

1. 如图 1-2 所示, 质点作半径为 R 、速率为 v 的匀速率圆周运动。由 A 点运动到 B 点, 则

位移 $\Delta r =$ _____;

路程 $s =$ _____;

$\Delta v =$ _____;

$|\Delta v| =$ _____;

$\Delta v =$ _____。

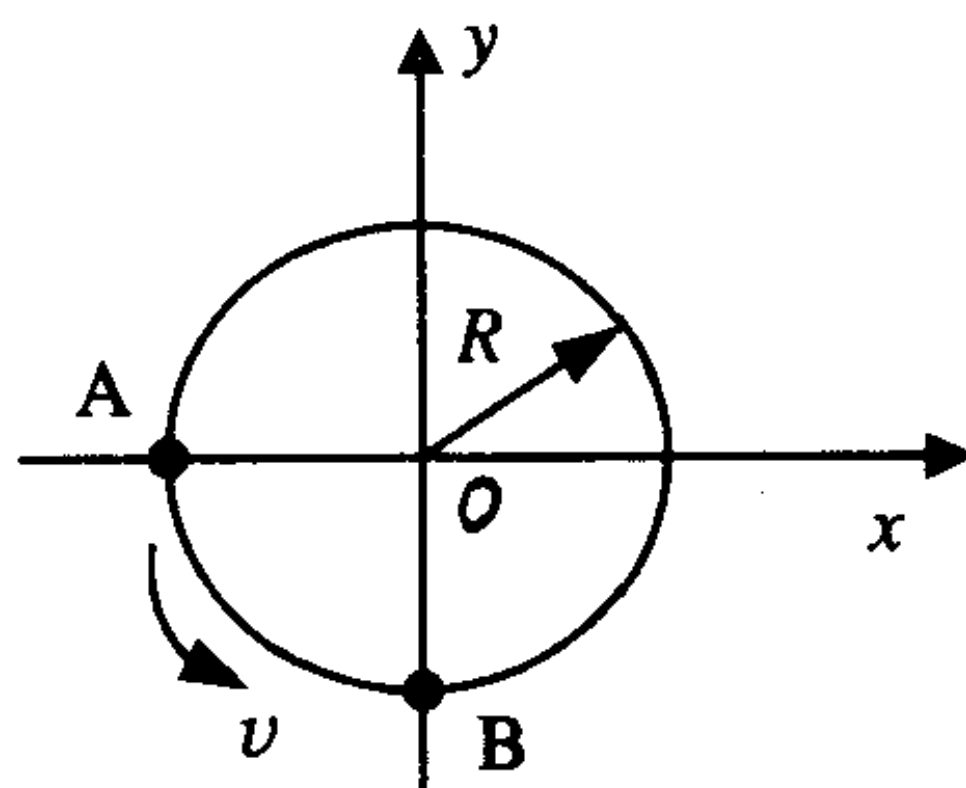


图 1-2

2. 一质点沿 x 轴方向运动, 其运动方程为 $x = 10 - 9t + 6t^2 - t^3$ (SI), 则

质点的速度 $v =$ _____;

其加速度 $a =$ _____;

质点沿 x 轴正方向的最大速度值 $v_{\max} =$ _____;

质点前 2s 的位移 $\Delta x =$ _____;

前 2s 的路程 $s =$ _____。

3. 一质点的运动方程为 $x = 2t$, $y = 19 - 2t^2$, 其中 x, y 以 m 计, t 以 s 计。则质点的轨道方程为 _____;

$t = 2\text{s}$ 时的位置矢径 $r =$ _____;

$t = 2\text{s}$ 的瞬时速度 $v =$ _____;

前 2s 内的平均速度 $\langle v \rangle =$ _____。

4. 一质点沿 x 轴正方向运动, 其加速度为 $a = kt$ (SI), 式中 k

为常数。当 $t = 0$ 时, $v = v_0, x = x_0$, 则

常数 k 的量纲为 _____;

质点的速度 $v =$ _____;

质点的运动方程为 $x =$ _____。

5. 一质点作半径为 $R = 2\text{m}$ 的圆周运动, 其路程为 $s = \pi t^2 (\text{SI})$ 。则

质点的速率 $v =$ _____;

切向加速度 $a_t =$ _____;

法向加速度 $a_n =$ _____;

总加速度 $a =$ _____。

(切向、法向的单位矢量分别为 t_0, n_0)

6. 如图 1-3 所示, 一质点作抛体运动, 在轨道的 P 点处, 速度为 v , v 与水平面的夹角为 θ 。则在该时刻,

质点的 $\frac{dv}{dt} =$ _____;

轨道在 P 点处的曲率半径 $\rho =$

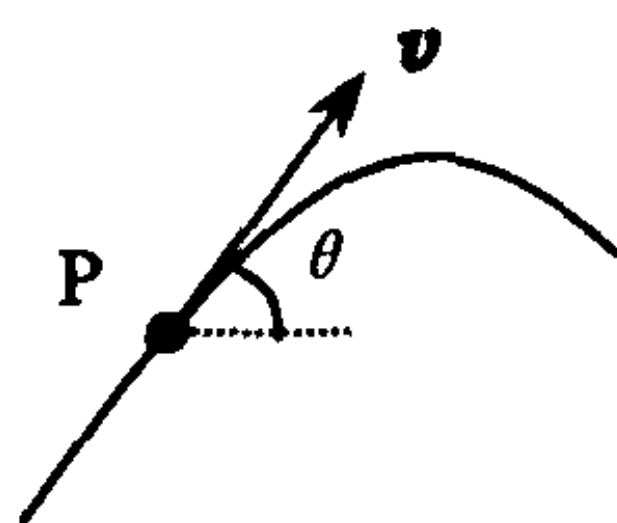


图 1-3

7. 一质点沿半径为 R 的圆周运动, 其角坐标与时间的函数关系(以角量表示的运动方程)为 $\theta = 10\pi t + \frac{1}{2}\pi t^2 (\text{SI})$ 。则质点的

角速度 $\omega =$ _____;

角加速度 $\beta =$ _____;

切向加速度 $a_t =$ _____;

法向加速度 $a_n =$ _____。

8. 如图 1-4 所示, 一辆货车的驾驶室后壁高度为 h , 车厢长为 l 。竖直下落的雨点速度为 u , 要使车厢中的货物不致淋雨, 则车的速度 v 的大小必须满足的条件是 _____。

9. 一质点从 $r_0 = -5j$ 位置开始运动, 其速度与时间的关系为

$v = 3t^2i + 5j$, 则质点到达 x 轴所需的时间 $t = \underline{\hspace{2cm}}$, 此时质点在 x 轴上的位置为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

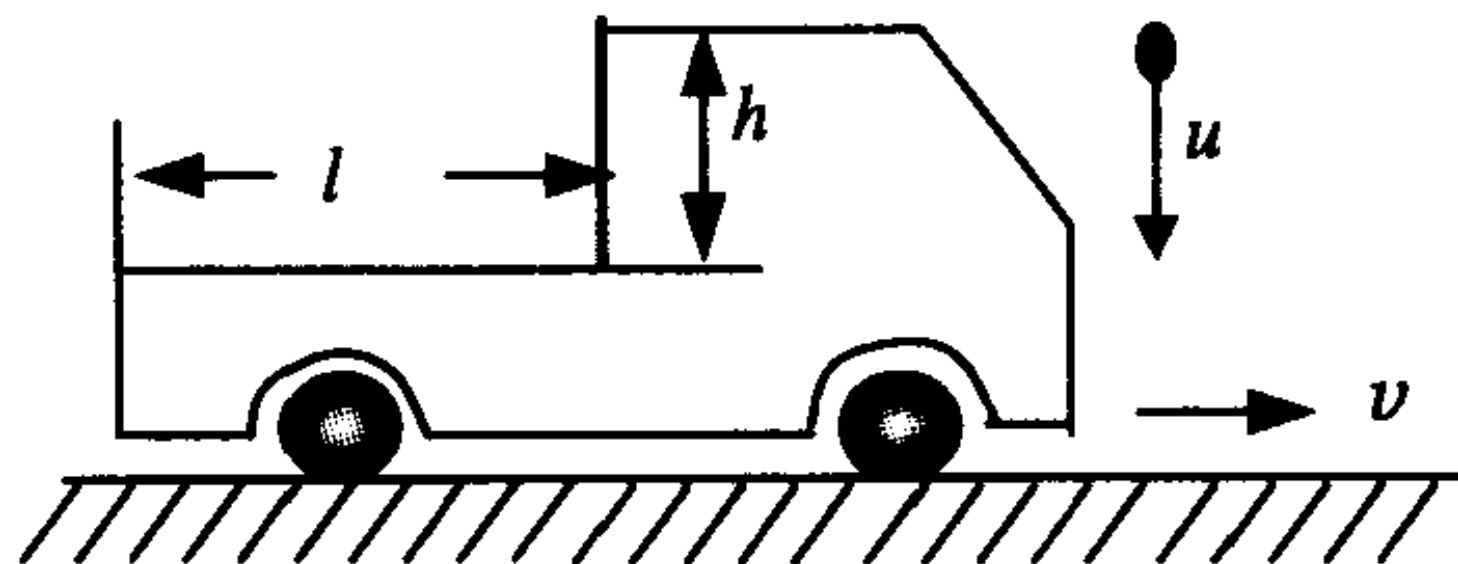


图 1-4

填空题解答

1. [解] 由图 1-5 可知

位移

$$\Delta \mathbf{r} = R\mathbf{i} - R\mathbf{j}$$

路程

$$S = \frac{1}{2}\pi R$$

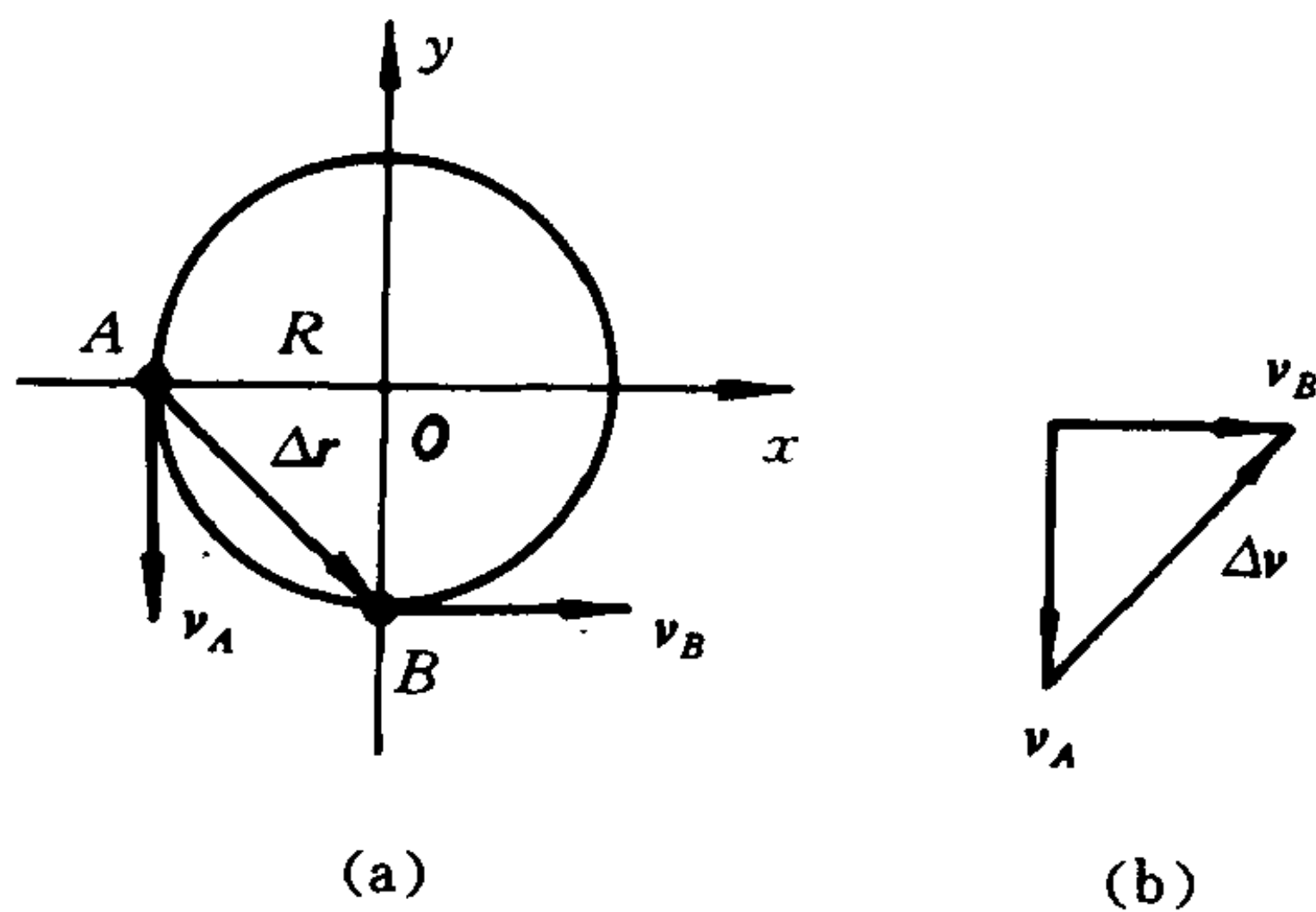


图 1-5

速度增量

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = v\mathbf{i} - (-v\mathbf{j})$$

即 $\Delta v = v_i + v_j$

速度增量的大小 $|\Delta v| = \sqrt{v^2 + v^2} = \sqrt{2} v$

速率的增量 $\Delta v = v - v = 0$

2. [解] 已知运动方程为 $x = 10 - 9t + 6t^2 - t^3$, 则

质点速度为 $v = \frac{dx}{dt} = -9 + 12t - 3t^2$

加速度为 $a = \frac{dv}{dt} = 12 - 6t$

当 $\frac{dv}{dt} = 12 - 6t = 0$

亦即 $t = \frac{12}{6} = 2\text{s}$ 时, 质点具有最大速度, 其值为

$$v_{\max} = -9 + 12t - 3t^2$$

$$v_{\max} = -9 + 12 \times 2 - 3 \times 2^2 = 3\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

又 $x_0 = 10\text{m}$, $x_2 = 10 - 9 \times 2 + 6 \times 2^2 - 2^3 = 8\text{m}$

所以前 2s 的位移

$$\Delta x = x_2 - x_0 = 8 - 10 = -2\text{m}$$

由 $v = -9 + 12t - 3t^2 = 0$

得 $t = 1, \quad t = 3$ (不合题意)

故 $x_1 = 10 - 9 \times 1 + 6 \times 1^2 - 1^3 = 6\text{m}$

所以前 2s 的路程为

$$s = (x_0 - x_1) + (x_2 - x_1) = (10 - 6) + (8 - 6) = 6\text{m}$$

3. [解] 质点的运动方程为

$$x = 2t \tag{1}$$

$$y = 19 - 2t^2 \tag{2}$$

由式(1)得 $t = \frac{x}{2}$, 代入式(2) 即可得

质点的轨道方程 $y = 19 - \frac{x^2}{2}$

质点的位矢为 $r = 2ti + (19 - 2t^2)j$

当 $t = 2\text{s}$ 时, 质点的矢径为

$$r = 2 \times 2i + (19 - 2 \times 2^2)j$$

即 $r = 4i + 11j$

质点的速度为 $v = \frac{dr}{dt} = 2i - 4tj$

当 $t = 2s$ 时, $v = 2i - 4 \times 2j = 2i - 8j$

由定义可知,质点在前两秒内的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r_2 - r_0}{2}$$

$$\bar{v} = \frac{1}{2}[(2 \times 2i + (19 - 2 \times 2^2)j - 19j)]$$

$$\bar{v} = 2i - 4j$$

4. [解] 由于加速度 $a = kt$, 所以常数 k 的量纲为 $\dim k = \dim a / \dim t$, 而加速度和时间的量纲分别为

$$\dim a = \dim v / \dim t = LT^{-2}$$

$$\dim t = T$$

故 $\dim k = \dim a / \dim t = LT^{-3}$

由 $a = \frac{dv}{dt} = kt$ 得

$$dv = ktdt$$

作积分 $\int_{v_0}^v dv = k \int_0^t t dt$

$$v - v_0 = \frac{1}{2}kt^2$$

$$v = v_0 + \frac{1}{2}kt^2$$

由于 $v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{2}kt^2$

所以 $dx = (v_0 + \frac{1}{2}kt^2)dt$

作积分 $\int_{x_0}^x dx = \int_0^t (v_0 + \frac{1}{2}kt^2)dt$

$$x - x_0 = v_0t + \frac{1}{6}kt^3$$

故
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{6} k t^3$$

5. [解] 已知路程为 $S = \pi t^2$, 则质点运动的速率为:

$$v = \frac{dS}{dt} = 2\pi t$$

切向加速度为: $a_t = \frac{dv}{dt} = 2\pi$

法向加速度为: $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 t^2}{2} = 2\pi^2 t^2$

总加速度为: $a = 2\pi t_0 + 2\pi^2 t^2 n_0$

6. [解] 如图 1-6 所示, 抛体运动的加速度就是重力加速度 g , 它的切向分量为 $a_t = \frac{dv}{dt} = -g \sin \theta$, 式中负号表示切向加速度的方向与切向正方向相反。

法向加速度 $a_n = g \cos \theta = \frac{v^2}{\rho}$

由此知 P 点处的曲率半径为

$$\rho = \frac{v^2}{g \cos \theta}$$

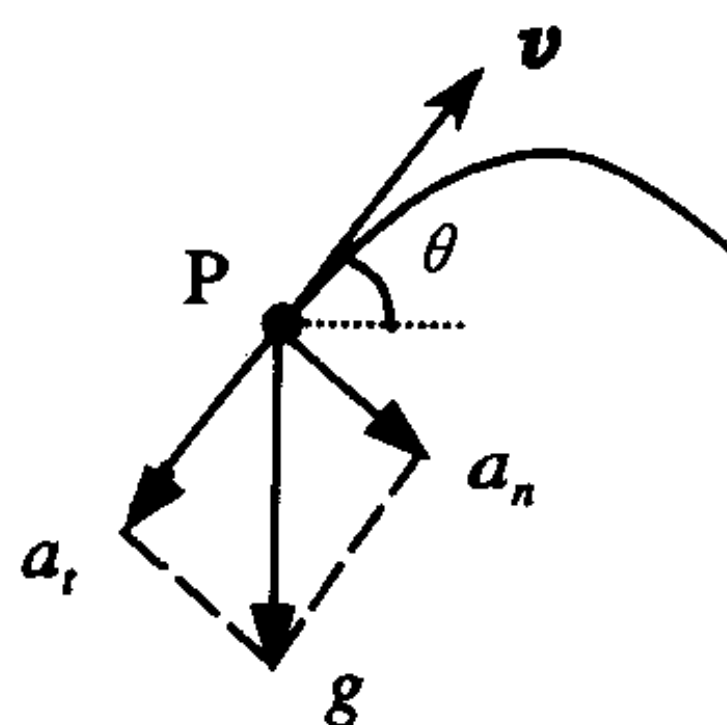


图 1-6

7. [解] 已知 $\theta = 10\pi t + \frac{1}{2}\pi t^2$

则质点的角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt} = 10\pi + \pi t$

角加速度 $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \pi$

切向加速度 $a_t = \beta R = \pi R$

法向加速度 $a_n = \omega^2 R = R(10\pi + \pi t)^2$

8. [解] 如图 1-7 所示, 取地面为基本参照系, 汽车为运动参照系, 雨点为运动物体, 则绝对速度为 u , 方向竖直向下。牵连速度为 v , 方向水平向右, 则雨点对汽车的相对速度为

$$v' = u - v$$

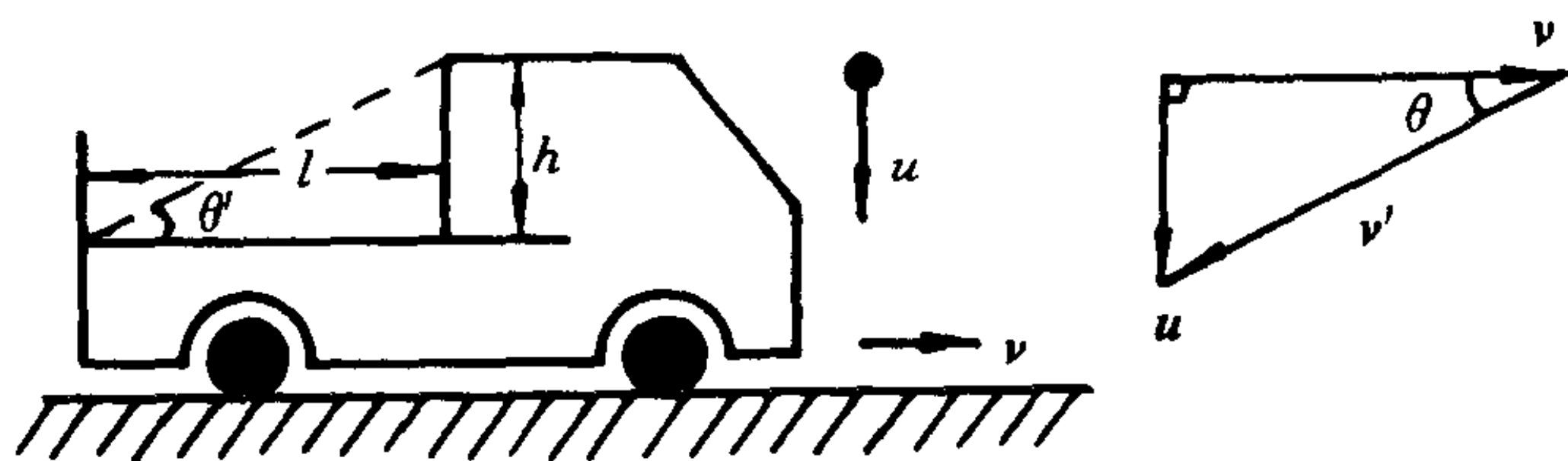


图 1-7

在图示的速度三角形中，

$$\tan\theta = \frac{u}{v}$$

当 θ 角小于车厢上的相应角度 θ' 时

即
$$\tan\theta \leq \tan\theta'$$

亦即
$$\frac{u}{v} \leq \frac{h}{l}$$

$$v \geq \frac{ul}{h}$$

车厢上的货物不致淋雨。

9. [解] 已知质点速度为 $v = 3t^2i + 5j$

则

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = 3t^2 & (1) \\ v_y = \frac{dy}{dt} = 5 & (2) \end{cases}$$

由式(1)得

$$dx = 3t^2 dt$$

作积分

$$\int_0^x dx = \int_0^t 3t^2 dt$$

则 x 轴方向分运动的运动方程为

$$x = t^3$$

由式(2)得

$$dy = 5dt$$

作积分

$$\int_{-5}^y dy = \int_0^t 5dt$$

则 y 轴方向的分运动的运动方程为

$$y = 5t - 5$$

当质点到达 x 轴时, $y = 0$, 即

$$y = 5t - 5 = 0$$

由此知 $t = 1\text{s}$

此时质点在 x 轴上的位置为

$$x = t^3 = 1^3 = 1\text{m}$$

三、问答题

1. 什么叫运动方程?它在力学研究中具有什么重要意义?

[答] 质点的空间位置坐标随时间变化的函数关系叫做运动方程。知道了质点的运动方程,就可以知道质点在任意时刻的位置、速度、加速度以及运动轨道。由此可见,掌握了运动方程,也就掌握了质点运动的全貌。探讨运动方程,是力学的中心课题之一。

2. 对于运动的三种描述方式,分别说明它们的优越性和局限性。

① 解析法(如运动方程)

描述准确,完整,便于理论上作定量分析,但不直观,且复杂运动难以建立运动方程。

② 表格法(如位置 \sim 时刻表,如列车时刻表)

便于查找,但不完整。难以建立运动方程的复杂运动用表格法描述是可行的。

③ 图示法(如速度 \sim 时刻图线)

直观,信息表达集中,但不精确。

四、计算与证明题

1. 已知质点的运动方程为 $r = A_1 \cos \omega t i + A_2 \sin \omega t j$ (SI), 其中 A_1, A_2, ω 均为常量。

① 试证明质点的运动轨迹为一椭圆；

② 证明质点的加速度恒指向椭圆中心；

③ 试说明质点在通过图 1-8 中 M 点时，其速率是增大还是减小？

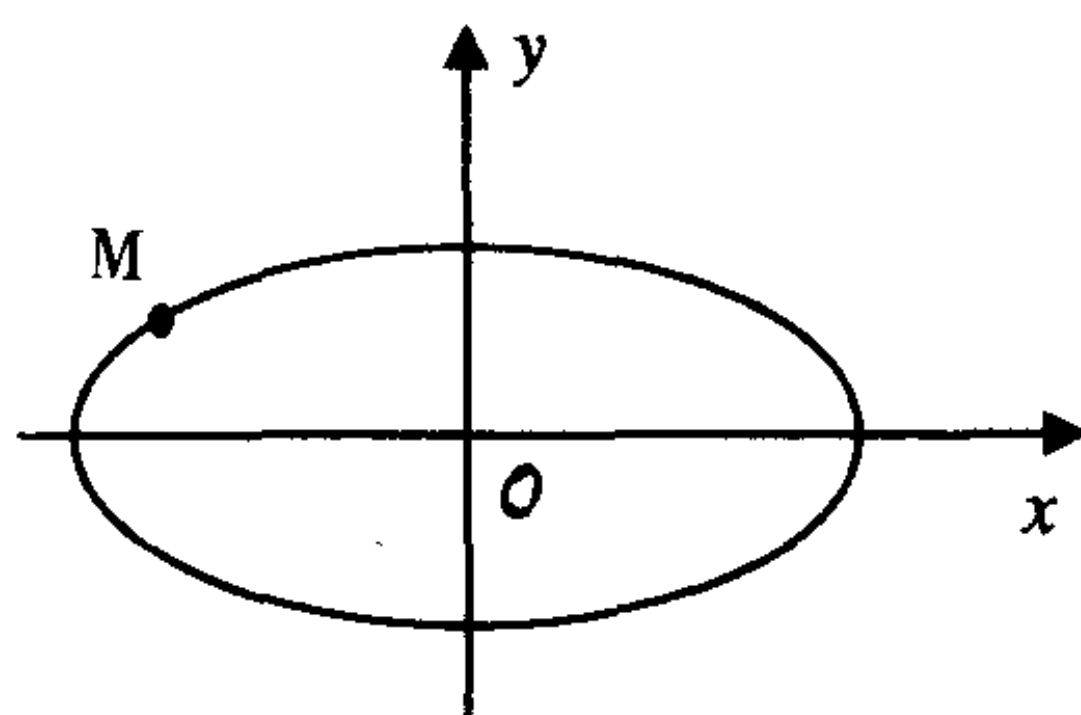


图 1-8

[证明]

$$\textcircled{1} \begin{cases} x = A_1 \cos \omega t \\ y = A_2 \sin \omega t \end{cases}$$

消去 t 得轨道方程为 $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$ (椭圆)

$$\textcircled{2} \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega A_1 \sin \omega t \mathbf{i} + \omega A_2 \cos \omega t \mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2 A_1 \cos \omega t \mathbf{i} - \omega^2 A_2 \sin \omega t \mathbf{j} \\ &= -\omega^2 (A_1 \cos \omega t \mathbf{i} + A_2 \sin \omega t \mathbf{j}) = -\omega^2 \mathbf{r} \end{aligned}$$

\mathbf{a} 与 \mathbf{r} 反向，故 \mathbf{a} 恒指向椭圆中心。

③ 当 $t = 0$ 时， $x = A_1 \cos 0 = A_1$ ， $y = A_2 \sin 0 = 0$

质点位于图 1-9 中的 P 点。

当 $t = \frac{\pi}{2\omega}$ 时， $x = A_1 \cos \frac{\pi}{2} =$

0 ， $y = A_2 \sin \frac{\pi}{2} = A_2$

质点位于图 1-9 中的 Q 点。显然质点在椭圆形轨道上沿反时针方

向运动。在 M 点，加速度 \mathbf{a} 的切向分量 a_t 如图所示。可见在该点切向加速度 a_t 的方向与速度 \mathbf{v} 的方向相反。所以，质点在通过 M 点时速率减小。

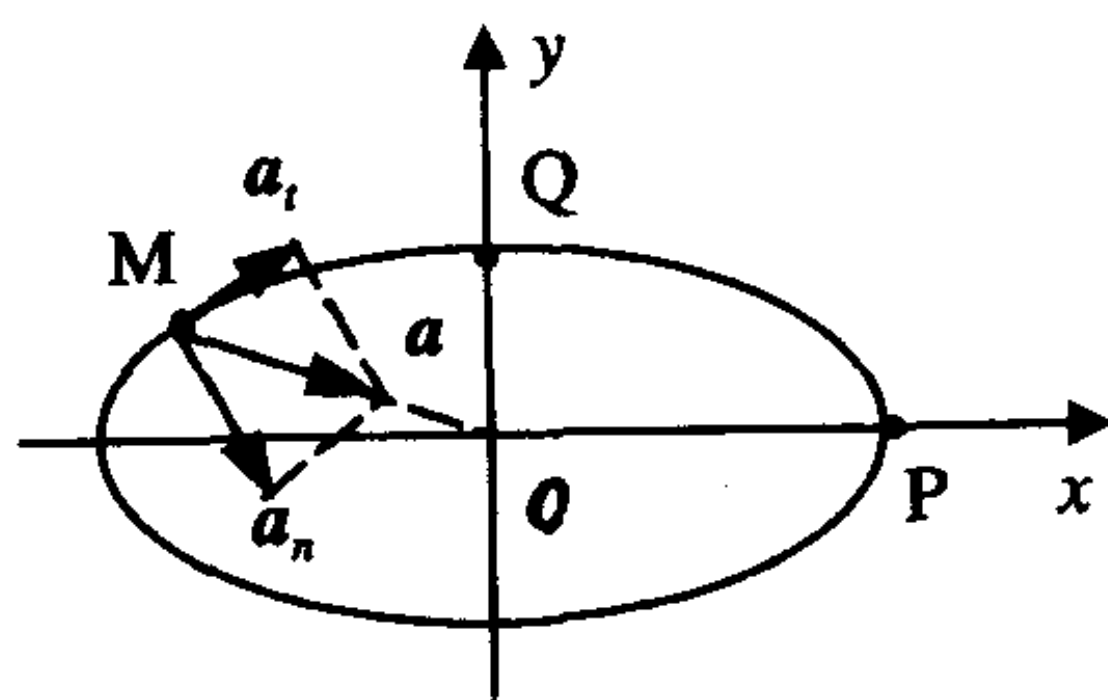


图 1-9

2. 某物体从空中由静止落下,其加速度 $a = A - Bv$ (A, B 为常量),试求:

① 物体下落的速度;

② 物体的运动方程。

(取竖直向下为 y 轴正向,设 $t = 0$ 时, $y_0 = 0, v_0 = 0$)

[解] ① $a = \frac{dv}{dt} = A - Bv$

$$\frac{dv}{A - Bv} = dt$$

$$-\frac{1}{B} \int_0^v \frac{d(A - Bv)}{A - Bv} = \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{(A - Bv)}{A} = -Bt$$

$$\frac{A - Bv}{A} = e^{-Bt}$$

$$v = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})$$

② $v = \frac{dy}{dt} = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})$

$$dy = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})dt$$

$$\int_0^y dy = \frac{A}{B} \left[t + \left(\frac{e^{-Bt}}{B} \right) \right]_0^t$$

$$y = \frac{A}{B} \left[t + \frac{1}{B}(e^{-Bt} - 1) \right]$$

$$y = \frac{A}{B}t + \frac{A}{B^2}(e^{-Bt} - 1)$$

3. 如图 1-10 所示,一质点沿半径为 R 的圆形轨道运动,初速度为 v_0 ,其加速度方向与速度方向之间的夹角 θ 恒定。试求质点的速度(用 v_0, R, θ, t 表示)。

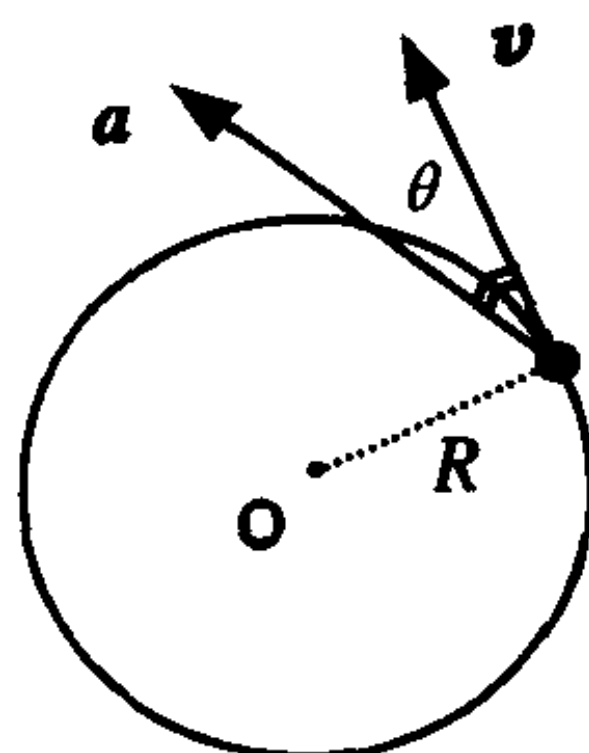


图 1-10

$$[\text{解}] \quad a_t = \frac{dv}{dt} \quad a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$\frac{a_t}{a_n} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{v^2}{R}} = \text{ctg}\theta, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{R} \text{ctg}\theta$$

$$\frac{R}{\text{ctg}\theta} \frac{dv}{v^2} = dt, \quad \frac{R}{\text{ctg}\theta} \int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = \int_0^t dt$$

$$\frac{R}{\text{ctg}\theta} \left(-\frac{1}{v}\right) \Big|_{v_0}^v = t, \quad \frac{R}{\text{ctg}\theta} \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v}\right) = t$$

$$v = \frac{v_0 R}{R - \text{ctg}\theta \cdot v_0 t}$$

4. 如图 1-11 所示一部高为 $h = 1.8\text{m}$ 的升降机, 以加速度 $a = 0.2\text{m/s}^2$ 上升, 当上升速度为 $v_0 = 2\text{m/s}$ 时, 有一螺帽自升降机的天花板上脱落。

① 取坐标系如图所示, 并以螺帽脱离天花板时作为计时起点, 则:

螺帽的运动方程为

$$y_1 = \underline{\hspace{4cm}};$$

升降机底版的运动方程为

$$y_2 = \underline{\hspace{4cm}}。$$

② 试计算螺帽从天花板落到升降机底版所需要的时间。

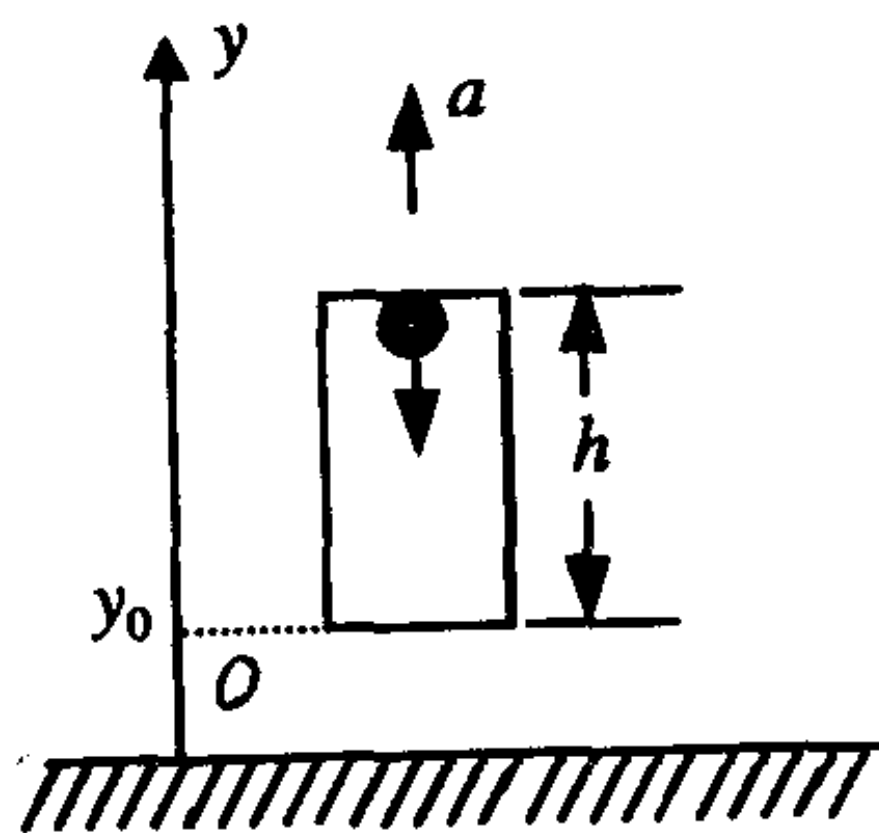


图 1-11

[解] 落到底板时, 螺帽与底板的位置坐标相同, 即

$$y_1 = y_2$$

$$\text{亦即} \quad (y_0 + h) + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\text{由此解得} \quad t = \sqrt{\frac{2h}{a+g}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.8}{0.2 + 9.8}} = 0.6 \text{ s}$$

五、附加题

1. 如图 1-12 所示, 一张致密光盘(CD) 音轨区域的内外半径分别为 $R_1 = 2.2 \text{ cm}$, $R_2 = 5.6 \text{ cm}$, 径向音轨密度 $n = 650 \text{ 条/mm}$ 。在 CD 唱机内, 光盘每转一圈, 激光头沿径向向外移动一条音轨, 激光束相对光盘是以 $v = 1.3 \text{ m/s}$ 的恒定线速度运动的。

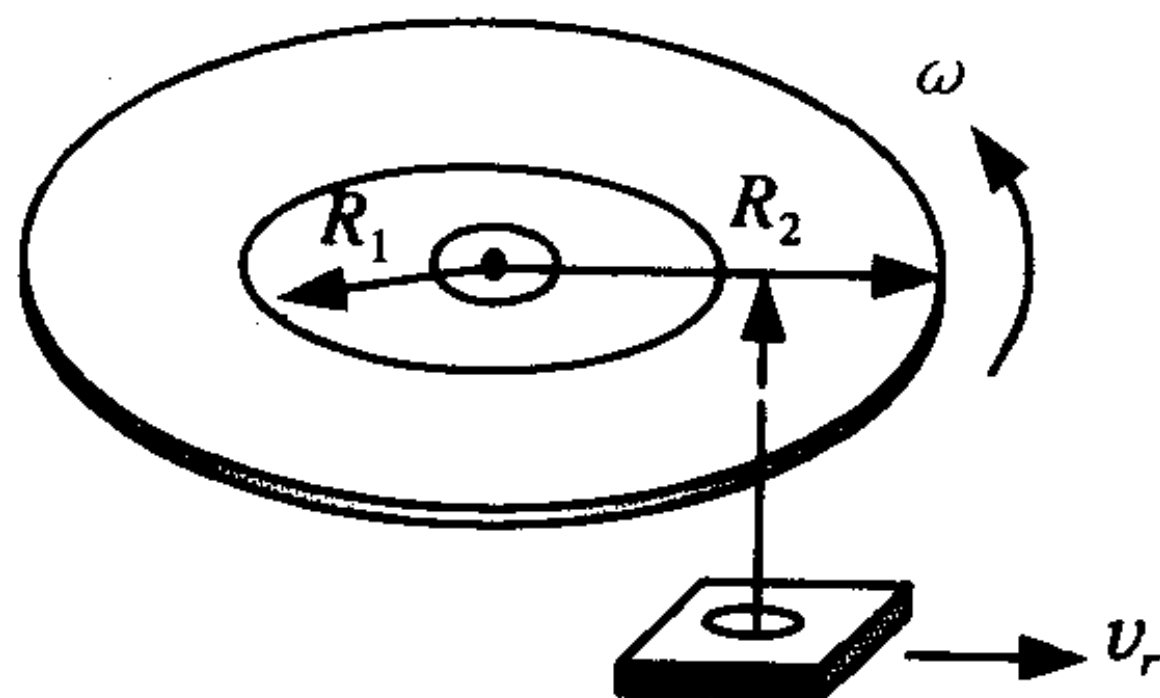


图 1-12

① 该光盘的全部放音时间是多少?

② 激光束到达离盘心 $r = 5.0 \text{ cm}$ 处时, 光盘转动的角速度和角加速度各是多少?

[解] ① 设激光束在光盘音轨上的投射点相对于光盘中心的位矢为 r , 则在半径为 r 、宽度为 dr 的环带区域内音轨的长度为 $2\pi r n dr$, 激光束扫过这部分音轨所需用的时间为:

$$dt = \frac{2\pi n r dr}{v} \quad (1)$$

故该光盘的全部放音时间为

$$\begin{aligned} t &= \int dt = \frac{2\pi n}{v} \int_{R_1}^{R_2} r dr \\ t &= \frac{\pi n}{v} (R_2^2 - R_1^2) = \\ &= \frac{\pi \times 650 \times 10^3 \times (0.056^2 - 0.022^2)}{1.3} \end{aligned}$$

$$t = 4.16 \times 10^3 \text{ s} = 69.3 \text{ min}$$

② 光盘转动的角速度为

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1.3}{0.05} = 26 \text{ rad/s}$$

角加速度为 $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{r}\right) = -\frac{v}{r^2} \frac{dr}{dt}$

由式(1) 知 $\frac{dr}{dt} = \frac{v}{2\pi nr}$

所以 $\beta = -\frac{v}{r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{v^2}{2\pi nr^3}$

$$\beta = -\frac{1.3^2}{2\pi \times 650 \times 10^3 \times 0.05^3} = -3.31 \times 10^{-3} \text{rad/s}^2$$

第 2 章 质点动力学

一、选择题

1. 下列表述中正确的是()。

- A. 内力作用对系统的动量没有影响
- B. 内力不能改变系统的总动量
- C. 内力不能改变系统的总动能
- D. 内力对系统做功的总和不一定为零

2. 下列表述中正确的是()。

- A. 外力做功的代数和为零,则系统的动量守恒
- B. 系统所受合外力恒等于零,则动量守恒
- C. 系统所受合外力冲量的矢量和为零,则动量守恒
- D. 动量守恒定律仅适用于惯性参照系,但与惯性系的选择无关

3. 如图 2-1 所示,劲度系数为 k 的轻弹簧水平放置,一端固定,另一端系一质量为 m 的物体,物体与水平面间的摩擦系数为 μ 。开始时,弹簧没有伸长,现以恒力 F 将物体自平衡位置开始向右拉动,则系统的最大势能为()。

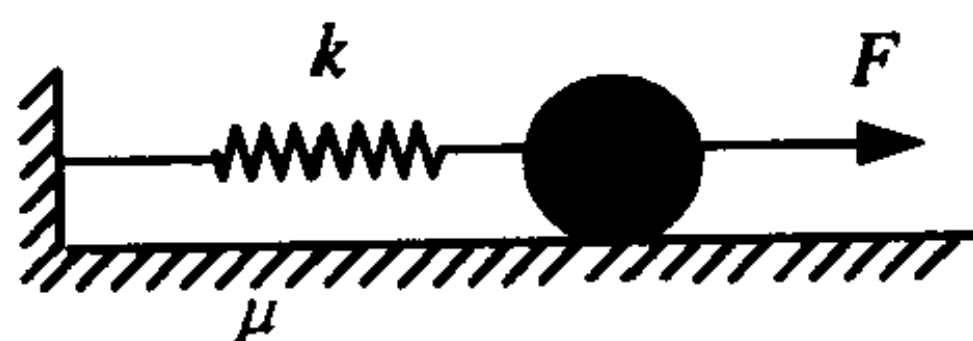


图 2-1

- A. $\frac{2}{k}(F - \mu mg)^2$
- B. $\frac{1}{2k}(F - \mu mg)^2$
- C. $\frac{2}{k}F^2$
- D. $\frac{1}{2k}F^2$

4. 我国第一颗人造卫星绕地球作椭圆运动,地球中心为椭圆

的一个焦点。在运行过程中,下列叙述中正确的是()

- A. 动量守恒
- B. 动能守恒
- C. 角动量守恒
- D. 以上均不守恒

5. 如图 2-2 所示,在水平光滑的圆盘上,有一质量为 m 的质点,拴在一根穿过圆盘中心光滑小孔的轻绳上。开始时质点离中心的距离为 r ,并以角速度 ω 转动。今以均匀速度向下拉绳,将质点拉至离中心 $r/2$ 处时,拉力所作的功为()

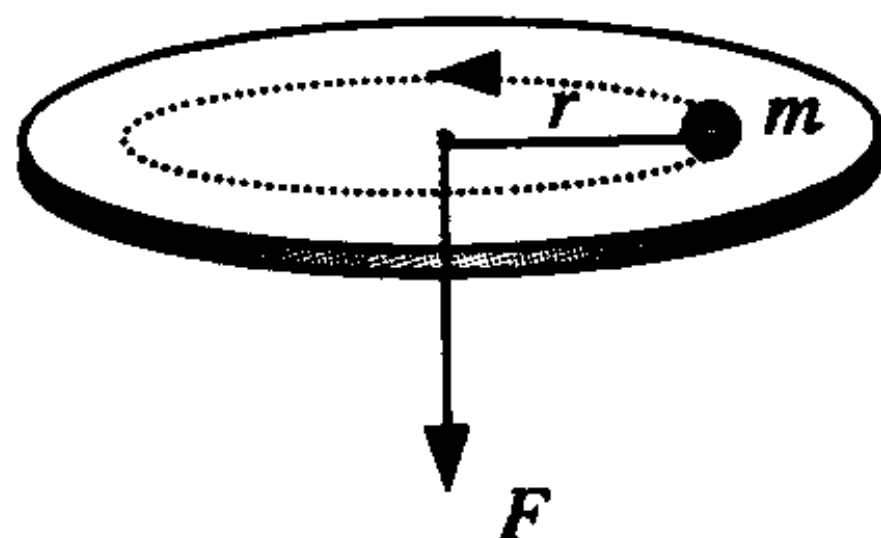


图 2-2

- A. $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$
- B. $\frac{3}{2}mr^2\omega^2$
- C. $\frac{5}{2}mr^2\omega^2$
- D. $\frac{7}{2}mr^2\omega^2$

6. 一力学系统由两个质点组成,它们之间只有引力作用。若两质点所受外力的矢量和为零,由此系统()

- A. 动量、机械能以及对一轴的角动量守恒。
- B. 动量、机械能守恒,但角动量是否守恒不能断定。
- C. 动量守恒,但机械能和角动量是否守恒不能断定。
- D. 动量和角动量守恒,但机械能是否守恒不能断定。

7. 对于一对作用力和反作用力来说,二者持续时间相同。下列结论中正确的是()

- A. 二者做功必相同。
- B. 二者做功总是大小相等符号相反。
- C. 二者的冲量相同。
- D. 二者冲量不同,做功也不一定相等。

8. 已知地球的质量为 m ,太阳的质量为 M ,地心与日心的距离为 R ,引力常数为 G ,则地球绕太阳作圆周运动的轨道角动量为()

$$A. m \sqrt{GMR} \quad B. \sqrt{\frac{GMm}{R}}$$

$$C. mM \sqrt{\frac{G}{R}} \quad D. \sqrt{\frac{GMm}{2R}}$$

9. 如图 2-3 所示,一质量为 m 的物体,位于质量可以忽略的直立弹簧正上方高度为 h 处,该物体从静止开始落向弹簧。若弹簧的劲度系数为 k ,不考虑空气阻力,则物体可能获得的最大动能是()

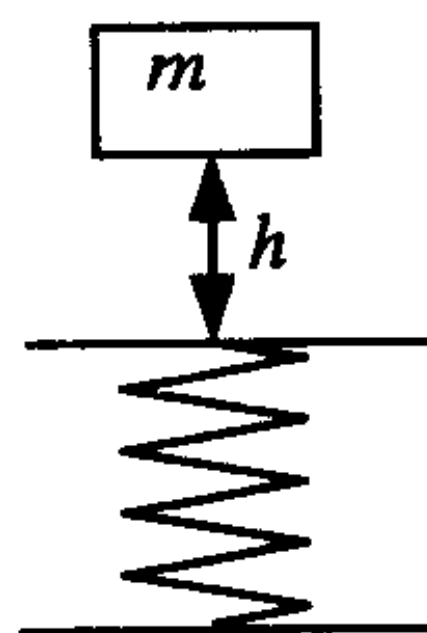


图 2-3

$$A. mgh \quad B. mgh - \frac{m^2 g^2}{2k}$$

$$C. mgh + \frac{m^2 g^2}{2k} \quad D. mgh + \frac{m^2 g^2}{k}$$

选择题解答

1. [答] 本题答案为(B,D)。

内力不能改变系统的总动量,但它却可以使动量在系统内各物体间转移传递,亦即改变动量在系统内的分布。内力可以改变系统的总动能,例如地雷的爆炸性内力使系统动能增加,依靠弹片的动能形成杀伤力。内力对系统做功的总和不一定为零。内力总是成对出现的,一对内力所做的功大小不一定相等,更不一定相消为零。

2. [答] 本题答案为(B,D)。

系统动量守恒的条件是合外力为零。合外力对系统所做功的代数和为零时,系统所受外力的矢量和不一定等于零,系统的动量也就不一定守恒。

系统所受外力冲量的矢量和为零,只能保证系统始末两态的动量相同,但并不能保证在整个过程中动量始终不变。例如作匀速

率圆周运动的质点在绕圆一周的过程中,受有法向力,但法向力的冲量为零,系统的动量时刻在变化,仅仅始末两态动量相同,这不叫动量守恒。

动量守恒定律仅适用于惯性参考系。

3. [解] 本题答案为(A)。

系统的势能为弹性势能。势能最大处并不在合力为零的位置上,而在速度为零的位置处。由动能定理得

$$\int_0^x (F - \mu mg - kx) dx = \frac{1}{2}mv^2$$

积分得 $(F - \mu mg)x - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2$

由此解得 $v = \sqrt{[2(F - \mu mg)x - kx^2]/m}$

令 $v = 0$ 即可得

$$2(F - \mu mg)x - kx^2 = 0$$

由此得 $x_{\max} = \frac{2}{k}(F - \mu mg)$

$$E_{p\max} = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 = \frac{2}{k}(F - \mu mg)^2$$

4. [答] 本题答案为(C)。

在卫星绕地球运动过程中,受有地球给它的引力作用,故卫星动量不守恒。而引力为有心力,它对地心的力矩为零,故卫星的角动量守恒,即

$$L = rmv\sin\theta = \text{恒量}$$

在椭圆形轨道上的不同位置处, r 和 v 的夹角 θ 以及 r 的大小均在变化,所以 v 的大小也在变化,显然卫星的动能是变化的。

5. [解] 本题答案为(B)。

在有心力作用下,质点的角动量守恒,即 $r_a m v_a = r_b m v_b$

而 $r_a = r, r_b = \frac{r}{2}$

代入上式得 $rmv_a = \frac{1}{2}rmv_b$

$$v_b = 2v_a$$

$$\begin{aligned}\text{由动能定理得 } W_{ab} &= \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 \\ &= \frac{1}{2}m(2v_a)^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 \\ W_{ab} &= \frac{3}{2}mv_a^2 = \frac{3}{2}m(\omega r)^2\end{aligned}$$

$$\text{则 } W_{ab} = \frac{3}{2}mr^2\omega^2$$

6. [答] 本题答案为(C)。

两质点所受外力的矢量和为零,但合外力矩却不一定为零,外力做功的代数和也不一定为零。这种情况下,系统动量一定守恒,而机械能和角动量不一定守恒。

7. [答] 本题答案为(D)。

作用力和反作用力大小相等,方向相反,分别作用在两个不同的物体上。一般来说,这两个物体的位置变动情况并不相同。故作用力和反作用力的功一般来说是不相同的,功的正负号也不一定相反。由于作用力与反作用力方向相反,在相同时间内,二者的冲量必然大小相等,方向相反。

8. [解] 本题答案为(A)。

$$\text{角动量 } L = r \times mv$$

在圆形轨道上 r 的大小恒定,且 $r \perp v$

$$\text{所以 } L = rmv = Rmv$$

$$\text{又 } F = G \frac{mM}{R^2} = m \frac{v^2}{R}$$

$$\text{由此得 } v = \sqrt{GM/R}$$

代入角动量的表达式得

$$L = Rmv = m \sqrt{GMR}$$

9. [解] 本题答案为(C)。

取弹簧原长处为坐标原点,竖直向下为 x 轴正方向,由动能定

理得

$$mg(h+x) + \int_0^x -kx dx = E_k - 0$$

由此得

$$E_k = mgh + mgx - \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{dE_k}{dx} = mg - kx = 0$$

$$x = mg/k$$

当 $x = mg/k$ 时, 物体的动能最大, 其值为

$$E_k = mgh + mg\left(\frac{mg}{k}\right) - \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2$$

$$E_k = mgh + \frac{m^2g^2}{2k}$$

二、填空题

1. 质量为 m 的物体, 在力 $F_x = A + Bt$ (SI) 作用下, 沿 x 轴正方向运动。已知在 $t = 0$ 时, $x_0 = 0, v_0 = 0$, 则

物体运动的速度为 $v =$ _____;

物体的运动方程为 $x =$ _____。

2. 质量为 m 的物体, 在力 $F = -kx$ 作用下沿 x 轴运动。已知在 $t = 0$ 时, $x_0 = A, v_0 = 0$ 。若令 $\frac{k}{m} = \omega^2$, 则

物体运动的速度为 $v =$ _____;

物体的运动方程为 $x =$ _____。

3. 直升飞机升力螺旋桨由对称的叶片组成。每一叶片的质量为 $m = 136 \text{ kg}$, 长度 $l = 3.66 \text{ m}$ 。当它的转数 $n = 320 \text{ r/min}$ 时, 则叶片根部张力的表达式为 $T =$ _____, 其值为 _____。(设叶片为均匀薄片)

4. 质量为 $m = 2 \text{ kg}$ 的物体, 所受之力为 $F_x = 4 + 6x$ (SI), 已知 $t = 0$ 时, $x_0 = 0, v_0 = 0$, 则物体在由 $x = 0$ 运动到 $x = 4 \text{ m}$ 的过程中, 该力对物体所作功的表达式为 $A =$ _____)

其值为_____；在 $x = 4 \text{ m}$ 处，物体的速度为 $v =$ _____；在此过程中，该力冲量的大小为 $I =$ _____。

5. 一物体在几个力共同作用下运动，其运动方程为 $r = ti + t^2j$ ，其中一力为 $F = 5ti$ ，则该力在前 2 s 内所作的功为 $A =$ _____。

6. 质量为 $m = 0.01 \text{ kg}$ 的子弹在枪管内所受到的合力为 $F = 40 - 80t(\text{SI})$ 。假定子弹到达枪口时所受的力变为零，则子弹行经枪管长度所需要的时间 $t =$ _____；在此过程中，合力冲量的表达式为 $I =$ _____；其值为 _____；子弹由枪口射出时的速度为 $v =$ _____。

7. 如图 2-4 所示，质量为 m 的质点，在竖直平面内作半径为 r 、速率为 v 的匀速圆周运动，在由 A 点运动到 B 点的过程中，所受合外力的冲量为 $I =$ _____；除重力以外，其它外力对物体所做的功为 $A =$ _____；在任一时刻，质点对圆心 O 的角动量为 $L =$ _____。

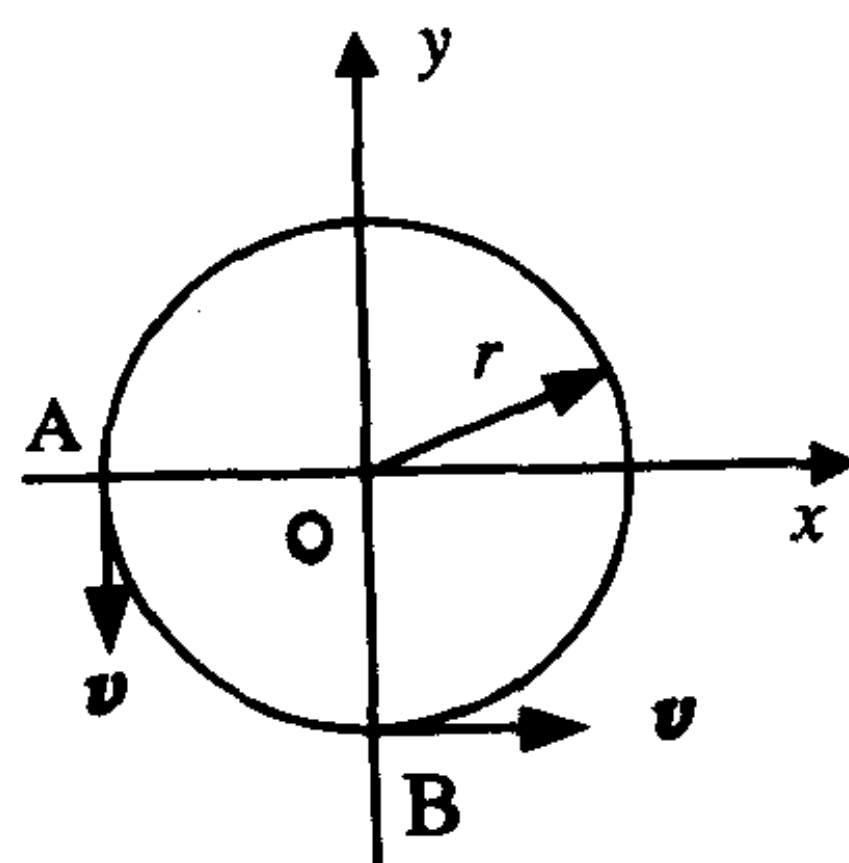


图 2-4

8. 设质量为 m 的卫星，在地球上空高度为两倍于地球半径 R 的圆形轨道上运转。现用 m, R , 引力恒量 G 和地球质量 M 表示卫星的动能 $E_k =$ _____；卫星和地球所组成的系统的势能为 $E_p =$ _____。

9. 氯化钠分子(NaCl)是由带正电荷的钠离子 Na^+ 和带负电荷的氯离子 Cl^- 构成的，两离子间相互作用的势能函数可以近似

表示为: $E_p(x) = \frac{a}{x^{8.9}} - \frac{b}{x^2}$ 式中 a 和 b 是正常数, x 是离子间的距离。则离子间的相互作用力 $F =$ _____。

填空题解答

1. [解] $F_x = A + Bt = m \frac{dv}{dt}$

$$dv = \left(\frac{A}{m} + \frac{B}{m}t\right)dt$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t \left(\frac{A}{m} + \frac{B}{m}t\right)dt$$

$$v = \frac{A}{m}t + \frac{B}{2m}t^2$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{A}{m}t + \frac{B}{2m}t^2$$

$$dx = \left(\frac{A}{m}t + \frac{B}{2m}t^2\right)dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t \left(\frac{A}{m}t + \frac{B}{2m}t^2\right)dt$$

$$x = \frac{A}{2m}t^2 + \frac{B}{6m}t^3$$

2. [解] $-kx = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt}$

$$v dv = -\frac{k}{m}x dx$$

$$\int_0^v v dv = -\omega^2 \int_A^x x dx$$

$$\frac{1}{2}v^2 = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2 \Big|_A^x = \frac{1}{2}\omega^2 A^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2$$

故 $v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$

又 $v = \frac{dx}{dt} = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega dt$$

$$\int_A^x \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega \int_0^t dt$$

$$\arcsin \frac{x}{A} \Big|_A^x = \omega t$$

$$\arcsin \frac{x}{A} - \frac{\pi}{2} = \omega t$$

$$\frac{x}{A} = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$x = A \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

3. [解] 如图 2-5 所示, 在旋翼上任取一长度为 dx 的线元, 其质量为

$$dm = \lambda dx$$

质元两边所受张力分别为 T 和 $(T + dT)$, 故质元 dm 所受法向力为

$$(T + dT) - T = -(dm)a_n$$

$$dT = -\lambda dx(\omega^2 x) = -\lambda \omega^2 x dx$$

$$\int_T^0 dT = -\lambda \omega^2 \int_0^l x dx$$

$$-T = -\lambda \omega^2 \times \frac{l^2}{2}$$

$$T = \frac{m}{l} \omega^2 \times \frac{l^2}{2} = \frac{1}{2} m \omega^2 l$$

$$m = 136 \text{ kg}, l = 3.66 \text{ m}$$

$$\omega = \frac{2\pi \times 320}{60} = 10.67\pi$$

代入数据得

$$T = \frac{1}{2} \times 136 (10.67\pi)^2 \times 3.66 = 2.79 \times 10^5 \text{ N}$$

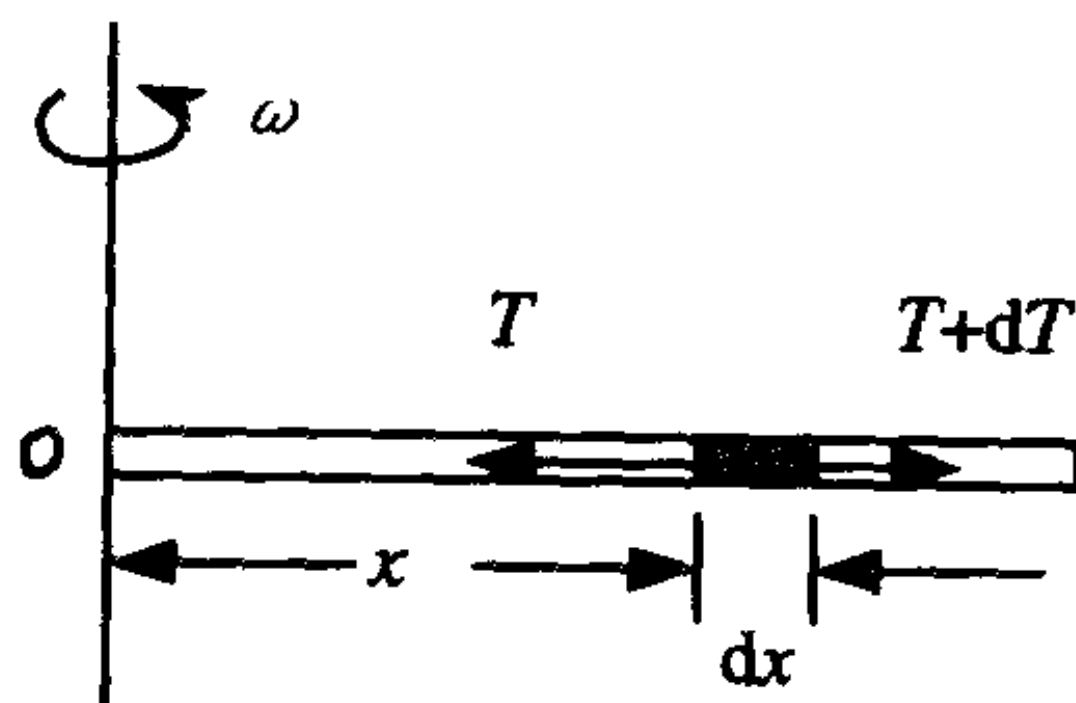


图 2-5

$$4. [\text{解}] \quad W = \int_0^x F_x dx = \int_0^x (4 + 6x) dx$$

$$W = 4x + 3x^2$$

$$\text{当 } x = 4 \text{ m 时, } W = 4 \times 4 + 3 \times 4^2 = 64 \text{ J}$$

$$\text{由动能定理得} \quad W = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 64}{2}} = 8 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

$$\text{由动量定理得} \quad I = mv = 2 \times 8 = 16 \text{ N} \cdot \text{s}$$

$$5. [\text{解}] \quad W = \int F_x dx = \int 5t dx$$

由运动方程 $r = ti + t^2j$ 知

$$x = t$$

$$\text{微分得} \quad dx = dt$$

$$\text{所以} \quad W = \int 5t dx = \int_0^t 5t dt = 2.5t^2$$

$$\text{当 } t = 2 \text{ s 时, } W = 2.5t^2 = 2.5 \times 2^2 = 10 \text{ J}$$

$$6. [\text{解}] \quad F = 40 - 80t = 0$$

$$t = 0.5 \text{ s}$$

$$I = \int_0^t F dt = \int_0^t (40 - 80t) dt$$

$$I = 40t - 40t^2$$

$$\text{当 } t = 0.5 \text{ s 时, } I = 40 \times 0.5 - 40 \times 0.5^2 = 10 \text{ N} \cdot \text{s}$$

$$\text{由动量定理知} \quad I = mv$$

$$v = \frac{I}{m} = \frac{10}{0.01} = 1000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

7. [解] 由动量定理知

$$I = mv_B - mv_A = mvi - (-mvj)$$

$$I = mvi + mvj$$

$$\text{由功能原理知} \quad W = \frac{1}{2}mv^2 - \left(\frac{1}{2}mv^2 + mgr \right) = -mgr$$

$$L = r \times mv$$

8. [解] 如图 2-6 所示, 由牛顿定律知

$$F = G \frac{mM}{(3R)^2} = m \left(\frac{v^2}{3R} \right)$$

由此得 $mv^2 = \frac{GmM}{3R}$

则卫星的动能为 $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{6R}$ 卫星

与地球所构成系统的引力势能为

$$E_p = -G \frac{mM}{r} = -\frac{GmM}{3R}$$

9. [解] 保守力等于相关势能梯度的负值

$$F = -\frac{dE_p}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{a}{x^{8.9}} - \frac{b}{x^2} \right)$$

$$F = \frac{8.9a}{x^{9.9}} - \frac{2b}{x^3}$$

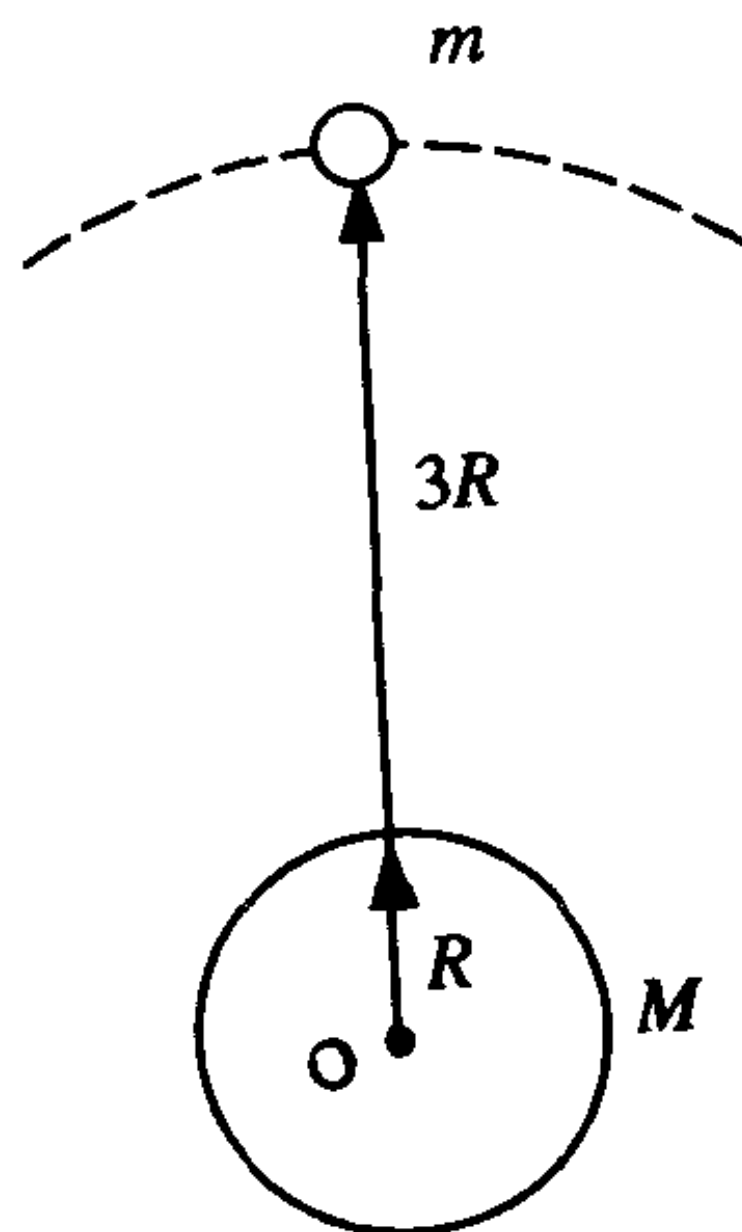


图 2-6

三、问答题

1. 将力划分为“接触力”和“非接触力”,这对具体问题的分析有什么重要意义?

[答] 将力分为接触力和非接触力,在分析物体受力情况时,首先标出非接触力,如重力、万有引力、电磁力等,然后只需注意该物与哪些物体相接触,只有在接触处才有可能受到其它物体的作用力,这样就能有效地防止遗漏某些作用力。

2. 试述牛顿定律的适用范围。

[答]① 牛顿定律中的物体是指质点。对有一定大小和形状的物体不能直接应用牛顿定律,但这并不限制定律的广泛适用性。任何复杂物体原则上都可以看作质点的集合。对集合中的质点应用牛顿定律,则可导出适合于刚体和流体的运动定律。

② 牛顿定律适用于惯性系。

③ 牛顿定律适用于低速领域的宏观物体。

四、计算题

1. 如图 2-7 所示, 射箭运动员用力 $F = 490 \text{ N}$ 使弓弦中点产生 0.6 m 的位移, 然后把质量 $m = 0.06 \text{ kg}$ 的箭竖直上射。设拉力和弓弦中点的位移成正比(准弹性力), 试求该箭离弦后所能达到的最大高度。

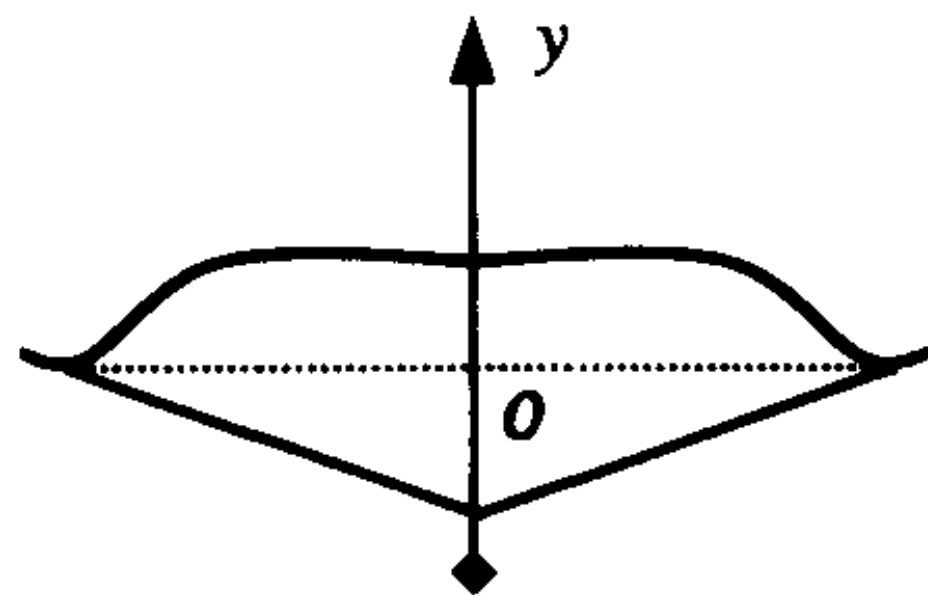


图 2-7

[解] 用牛顿定律求解

$$F = -ky - mg = m \frac{dv}{dt}$$

$$-ky - mg = m \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = mv \frac{dv}{dy}$$

$$mv dv = -(ky + mg) dy$$

$$\int_0^v mv dv = - \int_{-0.6}^0 (ky + mg) dy$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = 0.18k - 0.6mg$$

又由 $f = ky \rightarrow k = \frac{f}{y} = \frac{490}{0.6}$

代入上式得 $\frac{1}{2}mv^2 = 147 - 0.6mg$

设该箭所能到达的最大高度为 h , 则由机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2}mv^2 = 147 - 0.6mg = mgh, \text{ 由此解得}$$

$$h = \frac{147}{mg} - 0.6 = 250 - 0.6 = 249.4 \text{ m}$$

2. 质量为 m 、速度为 v_0 的摩托车, 在关闭发动机以后沿直线滑行, 它所受到的阻力 $f = -cv$, 式中 c 为正常数。试求:

① 关闭发动机后 t 时刻的速度;

② 关闭发动机后 t 时间内所走的路程。

[解] ① $f = -cv = m \frac{dv}{dt}$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{c}{m} dt$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{c}{m} \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{c}{m} t$$

$$v = v_0 e^{-\frac{c}{m} t}$$

② $v = \frac{ds}{dt} = v_0 e^{-\frac{c}{m} t}$

$$ds = v_0 e^{-\frac{c}{m} t} dt$$

$$\int_0^s ds = v_0 \int_0^t e^{-\frac{c}{m} t} dt = -\frac{mv_0}{c} \int_0^t e^{-\frac{c}{m} t} d\left(-\frac{c}{m} t\right)$$

$$S = -\frac{mv_0}{c} e^{-\frac{c}{m} t} \Big|_0^t = \frac{mv_0}{c} (1 - e^{-\frac{c}{m} t})$$

3. 如图 2-8 所示, 具有光滑半球形凹槽的物块 B 固定在桌面上。质量为 m 的质点从凹槽的半球面(半径为 R) 的上端 P 点自静止开始下滑, 当滑至 $\theta = 30^\circ$ 的 Q 点时, 试求:

① 质点在 Q 点的速率(要求用牛顿定律和功能关系两种方法求解);

② 质点在 Q 点对球面的压力 N 。

[解] ① 用牛顿定律求解:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{法向: } N - mg \sin \theta = m \frac{v^2}{R} \quad (1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{切向: } mg \cos \theta = mg \frac{dv}{dt} \quad (2) \end{array} \right.$$

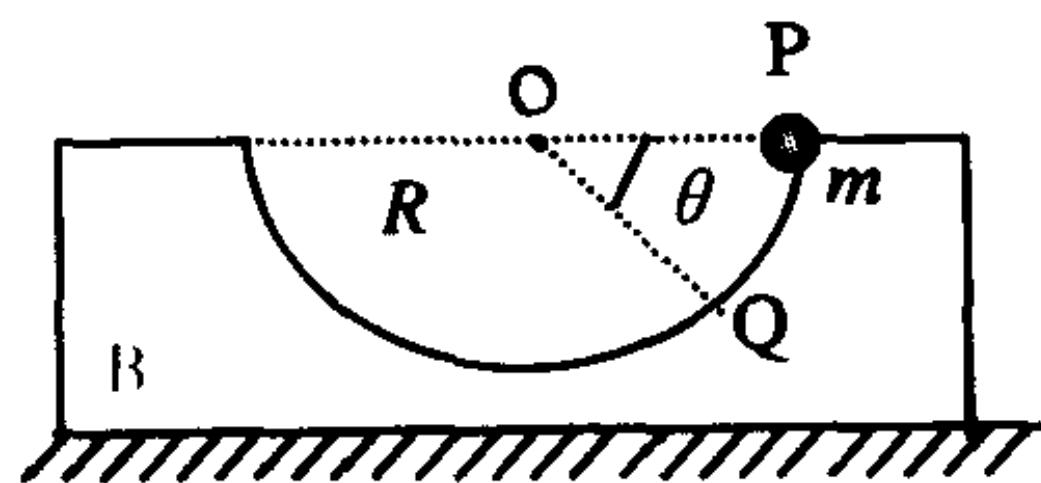


图 2-8

由 ② 得 $g\cos\theta = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$

$$v dv = g\cos\theta ds = g\cos\theta R d\theta$$

$$\int_0^v v dv = gR \int_0^\theta \cos\theta d\theta = gR \sin\theta$$

$$\frac{v^2}{2} = gR \sin\theta \rightarrow v = \sqrt{2gR \sin\theta} \rightarrow v = \sqrt{gR}$$

用机械能守恒定律求解：

取凹槽最低点为重力势能零点，则有：

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mg(R - R\sin\theta) \rightarrow v = \sqrt{2gR \sin\theta}$$

② 由式(1) 得

$$N = mg\sin\theta + m \frac{v^2}{R} = mg\sin\theta + m \frac{2gR \sin\theta}{R}$$

$$N = 3mg\sin\theta$$

$$\text{当 } \theta = 30^\circ \text{ 时 } N = \frac{3}{2}mg = 1.5mg$$

五、附加题

1. 制造半导体材料时，将硼离子注入硅单晶，硼离子与处于静止的硅原子发生完全弹性对心碰撞，对心碰后硼离子失去的动能称为最大传输能量 ΔE 。已知硼离子的摩尔质量为 $\mu_1 = 10.0\text{g}$ ，硅的摩尔质量为 $\mu_2 = 28.0\text{g}$ ，入射硼离子的能量为 $2.00 \times 10^5 \text{eV}$ ，试求 ΔE

[解] 设硼离子和硅原子的质量分别为 m_1, m_2 ，由于二者的碰撞为完全弹性对心碰撞，故在碰撞过程中，系统的机械能守恒，动量亦守恒，即

$$\frac{1}{2}m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \quad (1)$$

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (2)$$

$$\text{联立解得 } v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{10} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{20}$$

而碰撞前硅原子是静止的,即 $v_{20} = 0$

所以
$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{10} \quad (3)$$

硼离子碰撞过程中的动能损失为

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_1 (v_{10}^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 \left[1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \right]$$

而 $\mu_1 = N_A m_1, \mu_2 = N_A m_2$ (N_A 为阿伏加德罗常数)

所以
$$\Delta E = E_{10} \left[1 - \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right)^2 \right]$$

将 $E_{10} = 2.0 \times 10^5 \text{eV}, \mu_1 = 10.0 \text{g}, \mu_2 = 28.0 \text{g}$ 代入得

$$\Delta E = 2.0 \times 10^5 \left[1 - \left(\frac{10.0 - 28.0}{10.0 + 28.0} \right)^2 \right] = 1.55 \times 10^5 \text{eV}$$

第3章 刚体力学基础

一、选择题

1. 有些矢量是相对于一定点(或轴)而确定的,有些矢量是与定点(或轴)的选择无关的。下列给出的各量中,相对于定点(或轴)而确定的物理量是()。

- A. 矢径 B. 位移 C. 速度 D. 动量
E. 角动量 F. 力 G. 力矩

2. 某刚体绕定轴作匀变速转动时,对于刚体上距转轴为 r 处的任一质元 Δm 来说,它的法向加速度和切向加速度分别用 a_n 和 a_t 来表示,则下列表述中正确的是()。

- A. a_n, a_t 的大小均随时间变化
B. a_n 和 a_t 的大小均保持不变
C. a_n 的大小变化, a_t 的大小恒定不变
D. a_n 的大小保持恒定, a_t 的大小变化

3. 工程技术上的摩擦离合器是通过摩擦实现传动的装置,其结构如图 3-1 所示。轴向作用力可以使 A, B 两个飞轮实现离合。当 A 轮与 B 轮接合通过摩擦力矩带动 B 轮转动时,则此刚体系统在两轮接合前后()。



图 3-1

- A. 角动量改变,动能亦改变
B. 角动量改变,动能不变

- C. 角动量不变,动能改变
- D. 角动量不变,动能亦不改变

4. 一人张开双臂手握哑铃坐在转椅上,让转椅转动起来,若此后无外力矩作用,则当此人收回双臂时,人和转椅这一系统的()。

- A. 转速加大,转动动能不变
- B. 角动量加大
- C. 转速和转动动能都加大
- D. 角动量保持不变

5. 有 a, b 两个半径相同,质量相同的细圆环,其中 a 环的质量均匀分布,而 b 环的质量分布不均匀,若两环对过环心且与环面垂直轴的转动惯量分别为 I_a 和 I_b ,则()。

- A. $I_a > I_b$ B. $I_a < I_b$
- C. $I_a = I_b$ D. 无法确定 I_a 与 I_b 的相对大小

6. 下列说法中正确的是()。

- A. 系统的动量守恒,它的角动量也一定守恒
- B. 系统的角动量守恒,它的动量也必定守恒
- C. 系统的角动量守恒,它的机械能也一定守恒
- D. 以上表述均不正确

7. 如图 3-2 所示,一悬线长为 l ,质量为 m 的单摆和一长度为 l 、质量为 m 能绕水平轴自由转动的匀质细棒,现将摆球和细棒同时从与竖直方向成 θ 角的位置由静止释放,当它们运动到竖直位置时,摆球和细棒的角速度之间的关系为()。

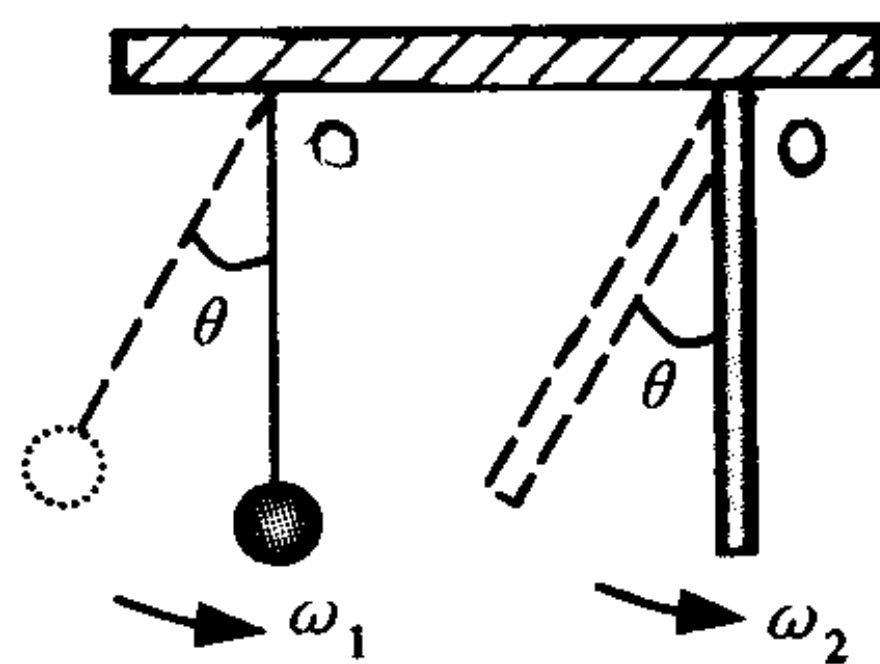


图 3-2

- A. $\omega_1 > \omega_2$ B. $\omega_1 = \omega_2$ C. $\omega_1 < \omega_2$

8. 如图 3-3 所示,圆盘绕轴 O 转动,若同时对称地射来两颗

质量相同,速度大小相同,方向相反且沿同一直线运动的子弹。射入后两颗子弹均留在盘内,则子弹射入后圆盘的角速度 ω 将 ()。

- A. 增大 B. 不变
C. 减少 D. 无法判断

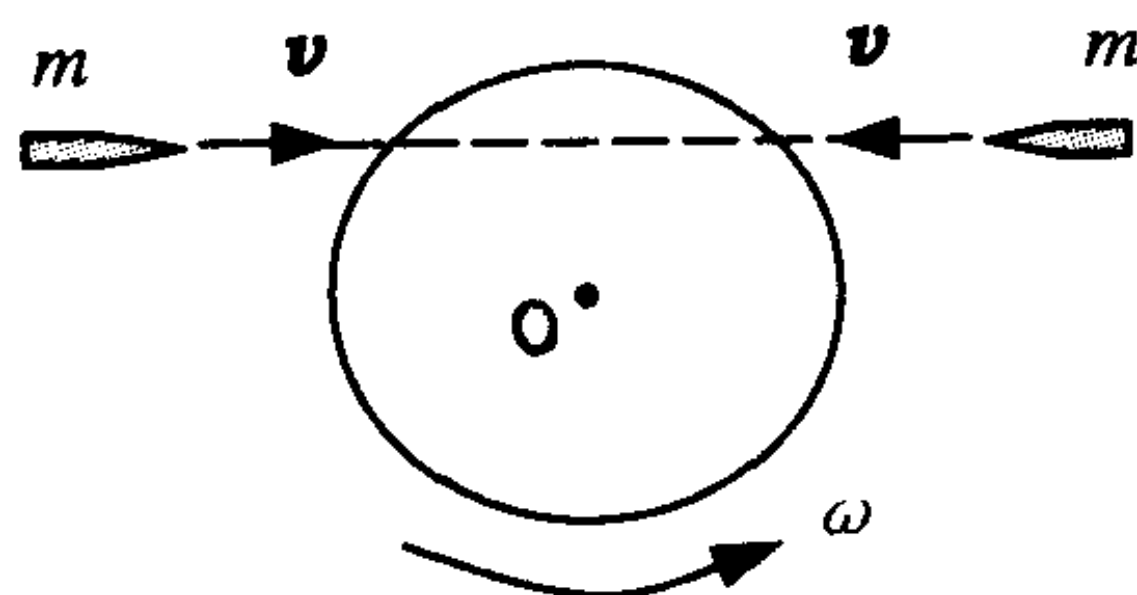


图 3-3

选择题解答

1. [答] 本题答案为(A,E,G)。

矢径是从任选的参点(坐标原点)指向质点的矢量,参考点不同,矢径的大小和方向均不相同。质点对点的角动量为 $L = r \times mv$, 其中 r 为质点相对于参考点的矢径;质点对过参考点的轴的角动量为对点的角动量在该轴上的投影。刚体的角动量为 $L = I\omega$, 它显然与轴的选取有关。力对点的力矩为 $M = r \times F$, 其中 r 为力的作用点相对于参考点的矢径,力对过参考点的轴的力矩为对点的力矩在该轴上的投影。由此可见,矢径、角动量、力矩这几个矢量与参考点或轴的选取有关,而位移、速度、动量、力则与参考点或轴的选取无关。

2. [解] 本题答案为(C)。

刚体中任一质元 Δm 的法向、切向加速度分别为 $a_n = \omega^2 r, a_t = \beta r$

当 $\beta = \text{恒量}$ 时, $\omega = \omega_0 + \beta t$, 显然, $a_n = \omega^2 r = (\omega_0 + \beta t)^2 r$, 其大小随时间而变, $a_t = \beta r$ 的大小恒定不变。

3. [解] 本题答案为(C)。

沿轴向作用的外力对轴不产生力矩, A 、 B 两轮间的摩擦力为内力, 故系统角动量守恒, 即 $I_A \omega = (I_A + I_B) \omega'$ 。

由此得
$$\omega' = \frac{I_A}{I_A + I_B} \omega$$

$$E'_k = \frac{1}{2} (I_A + I_B) \omega'^2 = \frac{1}{2} (I_A + I_B) \frac{I_A^2}{(I_A + I_B)^2} \omega^2$$

$$E'_k = \frac{1}{2} \frac{I_A^2 \omega^2}{I_A + I_B} = \frac{E_k}{(I_A + I_B)}$$

即 $E'_k \neq E_k$

4. [解] 本题答案为(C, D)。

无外力矩作用时, 转动系统的角动量守恒, 即 $I_0 \omega_0 = I \omega$

当人收回双臂时, 其转动惯量减小, 即 $I < I_0$

故
$$\omega > \omega_0$$

又
$$\frac{E_{k0}}{E_k} = \frac{\frac{1}{2} I_0 \omega_0^2}{\frac{1}{2} I \omega^2} = \frac{I_0 \omega_0}{I \omega} \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega_0}{\omega}$$

所以
$$E_k > E_{k0}$$

5. [解] 本题答案为(C)。

转动惯量 $I = \int r^2 dm$

对细圆环来说, 各质元 dm 到轴的距离均为圆环的半径, 即 $r = R = \text{恒量}$

所以
$$I = \int R^2 dm = R^2 \int dm = mR^2$$

显然, 两个半径相同, 质量相同的细圆环, 不论其质量在圆周上如何分布, 它们对过环心且与环面垂直的轴的转动惯量相同, 即 $I_a = I_b$ 。若以圆环的任一直径为转轴, 则这两个圆环的转动惯量就

不相等。

6. [答] 本题答案为(D)。

系统动量守恒,也就意味着系统所受合外力为零。而合外力为零时,合外力矩却不一定为零。例如一对力偶就是这样。故系统动量守恒时,它的角动量却不一定守恒。

系统的角动量守恒,也就意味着系统所受合外力矩为零。而合外力矩为零时,合外力却不一定为零。例如有心力的力矩为零,有心力也可以作功,所以在有心力作用下,系统的角动量守恒,但它的动量却不守恒,机械能也不一定守恒。

7. [解] 本题答案为(C)。

在摆动过程中,单摆和细棒(复摆)的机械能都守恒。取最低点为零势能面,则它们的机械能守恒方程分别为

$$\text{对单摆: } mg(l - l\cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_1^2 l^2 \quad (1)$$

$$\text{对细棒: } mg(l - \frac{l}{2}\cos\theta) = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega_2^2 + mg\frac{l}{2} \quad (2)$$

$$\text{由式(1)解得 } \omega_1 = \sqrt{2g(1 - \cos\theta)/l}$$

$$\text{由式(2)解得 } \omega_2 = \sqrt{3g(1 - \cos\theta)/l}$$

$$\text{可见 } \omega_1 < \omega_2$$

8. [解] 本题答案为(C)。

取子弹和圆盘为系统,在子弹射入圆盘的过程中,系统的角动量守恒。

由于两颗子弹同时对称地射入,故两子弹的初始角动量之和为零,所以有

$$I\omega_0 = (I + \Delta I)\omega$$

亦即

$$\omega < \omega_0$$

二、填空题

1. 如图 3-4 所示,一缆索绕过一个半径为 $r = 0.5\text{m}$ 的定滑轮

拉动升降机运动。假定升降机从静止开始以加速度 $a = 0.4 \text{ m/s}^2$ 匀加速上升。则滑轮的角加速度 $\beta =$ _____；
 开始上升后，第一秒末滑轮的角速度 $\omega =$ _____；
 第一秒末滑轮边缘上一点的加速度的大小 $a' =$ _____。

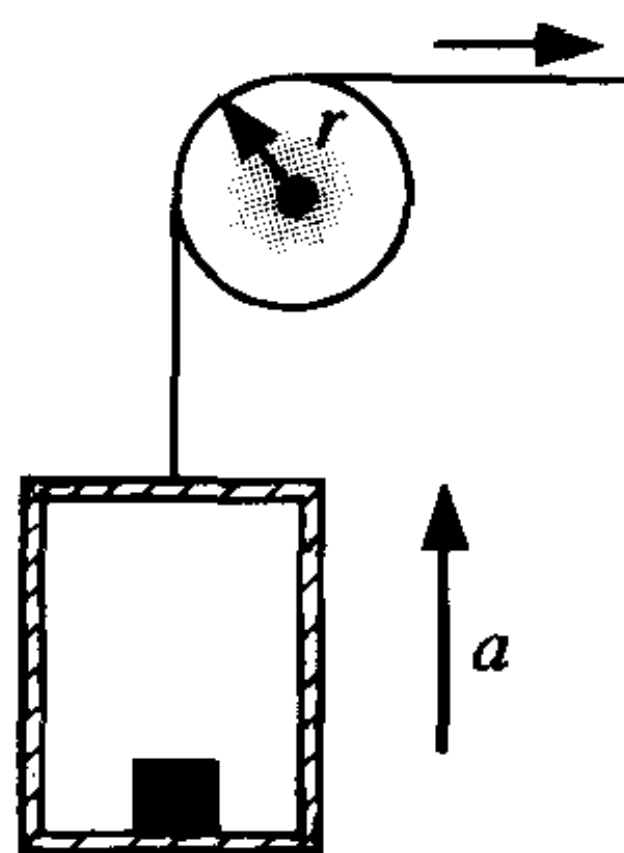


图 3-4

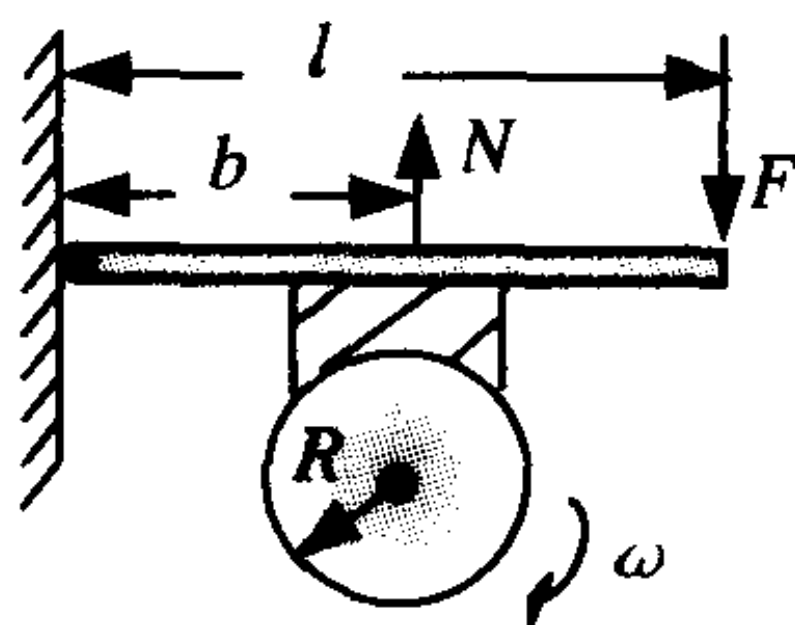


图 3-5

2. 如图 3-5 所示，转动惯量为 I 、半径为 R 的飞轮绕其中心轴以角速度 ω 转动，为了使其减速，在制动闸杆上加制动力 F ，已知闸瓦与飞轮间的摩擦系数 μ 及有关几何尺寸 b 和 l ，则飞轮所受到的制动力矩为 $M =$ _____。

3. 刚体的转动惯量取决于下列三个因素：

① _____； ② _____ ③ _____

4. 一冲床的飞轮，转动惯量为 $I = 25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ，并以角速度 $\omega_0 = 10 \pi \text{ rad/s}$ 转动。在带动冲头对板材作成型冲压过程中，所需的能量全部由飞轮来提供。已知冲压一次，需做功 4000 J ，则在冲压过程之末飞轮的角速度 $\omega =$ _____。

5. 如图 3-6 所示，一根长 l ，质量为 m 的匀质细棒可绕通过 O 点的光滑轴在竖直平面内转动，则棒的转动惯量 $I =$ _____；当棒由水平位置转到图示的位置时，则其角加速度 $\beta =$ _____。

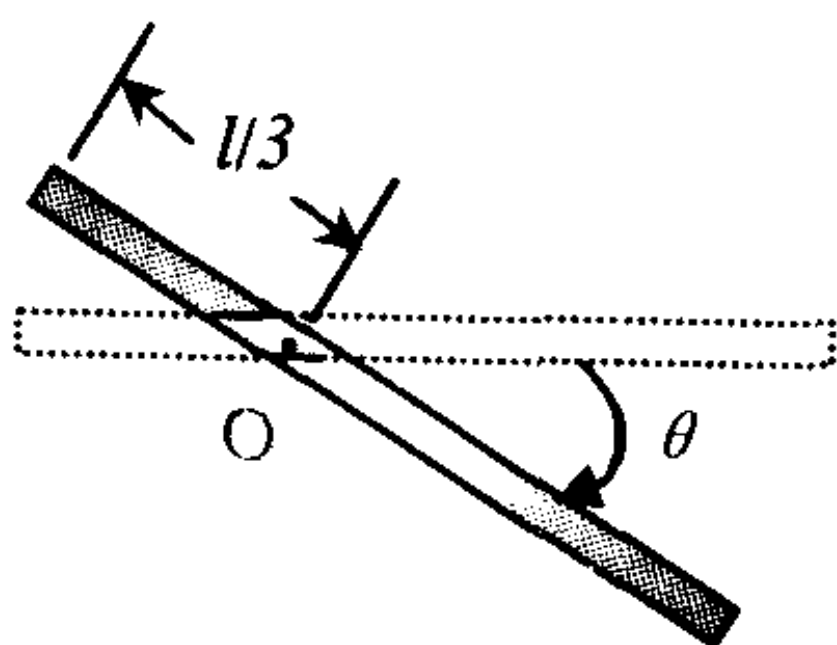


图 3-6

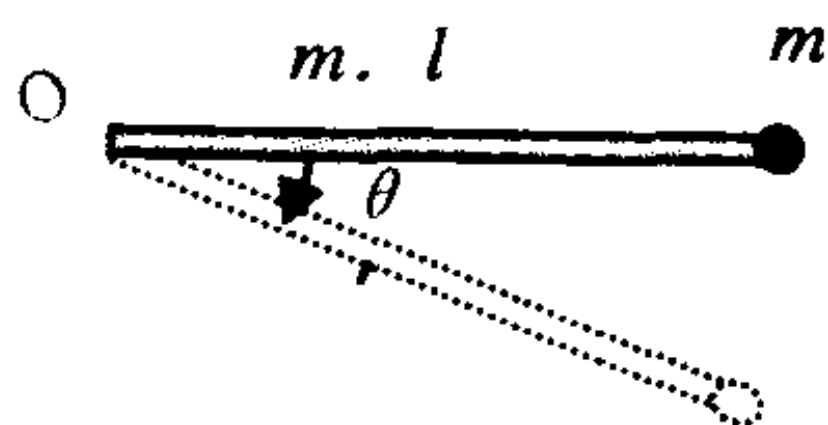


图 3-7

6. 如图 3-7 所示, 质量为 m , 长为 l 的均匀细杆, 可绕通过其一端 O 的水平轴转动, 杆的另一端与一质量也是 m 的小球固连。当该系统从水平位置由静止转过角度 θ 时, 则系统的角速度为 $\omega =$ _____。动能为 $E_k =$ _____。此过程中力矩所作的功为 $A =$ _____。

7. 如图 3-8 所示的系统, 从静止开始释放, 释放时弹簧没有伸长。如果摩擦可略去不计, 且已知 $m = 2 \text{ kg}$, $R = 0.3 \text{ m}$, $I = 0.5 \text{ kgm}^2$, $k = 20 \text{ N/m}$, $\theta = 37^\circ$ 。若取滑块 A 开始释放处为坐标原点, 则 A 沿斜面下滑距离 x 时, 它的速率 $v =$ _____。

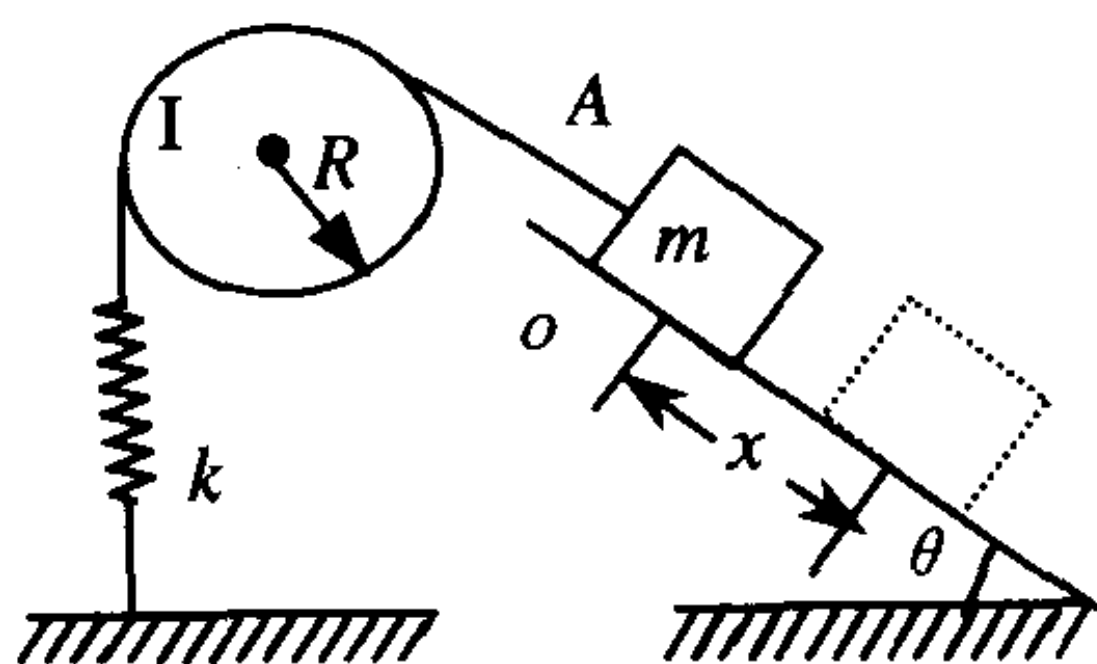


图 3-8

_____。当滑块的速率达到最大值时, 它沿斜面下滑的距离 $x =$ _____。

8. 系统作定轴转动时, 角动量守恒的条件是 _____。

填空题解答

1. [解] 升降机上升的加速度 a 等于滑轮边缘处的切向加速度 a_t , 而 $a_t = \beta r$

所以 $\beta = \frac{a_t}{r} = \frac{a}{r} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$

$$\omega = \beta t = 0.8 \times 1 = 0.8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

滑轮边缘处的法向加速度 $a_n = \omega^2 r = (\beta t)^2 r$

则第一秒末滑轮边缘处一点上的加速度为

$$a' = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(\beta r)^2 + (\beta t)^4 r^2}$$

$$a' = \beta r \sqrt{1 + \beta^2 t^4} = 0.8 \times 0.5 \sqrt{1 + (0.8)^2} \\ = 0.51 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

2. [解] 设飞轮给闸杆的支持力为 N , 方向垂直闸杆向上, 则制动闸杆的平衡条件为

$$Nb = Fl$$

由此得

$$N = \frac{Fl}{b}$$

故飞轮所受到的摩擦力为 $f = \mu N = \frac{\mu Fl}{b}$

相应的制动力矩为 $M = fR = \frac{\mu FRl}{b}$

3. [解] 总质量; 质量的分布; 转轴的位置。

4. [解] 对飞轮应用动能定理则有

$$W = \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2$$

由此解得

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2W}{I}}$$

而 $\omega_0 = 10\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $I = 25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $W = -4000 \text{ J}$

代入上式得 $\omega = 25.81 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

5. [解] $I = \frac{1}{3} \left(\frac{m}{3} \right) \left(\frac{l}{3} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2m}{3} \right) \left(\frac{2l}{3} \right)^2$

$$I = \frac{1}{9} \text{ ml}^2$$

细棒所受到的力矩为

$$M = \left(\frac{2m}{3}\right)g\left(\frac{l}{3}\cos\theta\right) - \left(\frac{m}{3}\right)g\left(\frac{l}{6}\cos\theta\right)$$

$$M = \frac{1}{6}mgl\cos\theta$$

由转动定律 $M = IB$ 得

$$\beta = \frac{M}{I} = \frac{\frac{1}{6}mgl\cos\theta}{\frac{1}{9}ml^2} = 3g\cos\theta/2l$$

6. [解] 系统的转动惯量为

$$I = ml^2 + \frac{1}{3}ml^2 = \frac{4}{3}ml^2$$

系统所受到的合外力矩为

$$M = mg \frac{l}{2}\cos\theta + mgl\cos\theta = \frac{3}{2}mgl\cos\theta$$

则力矩所作的功为

$$W = \int_0^\theta M d\theta = \int_0^\theta \frac{3}{2}mgl\cos\theta d\theta = \frac{3}{2}mgl\sin\theta$$

由定轴转动的动能定理 $W = \frac{1}{2}I\omega^2$ 得

$$\omega = \sqrt{\frac{2W}{I}} = \sqrt{\frac{2 \times \frac{3}{2}mgl\sin\theta}{\frac{4}{3}ml^2}} = \frac{3}{2} \sqrt{g\sin\theta/l}$$

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 = W = \frac{3}{2}mgl\sin\theta$$

7. [解] 将滑块, 定滑轮连同弹簧取作系统, 则系统所受外力不作功, 绳上的非保守性内力做功之和为零, 故系统机械能守恒。取滑块的初始位置为重力势能零点, 则

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx\sin\theta = 0$$

又

$$v = \omega R$$

联立解得
$$v = \sqrt{\frac{2mg\sin\theta \cdot x - kx^2}{m + I/R^2}}$$

将 $m = 2 \text{ kg}$, $\theta = 37^\circ$, $k = 20 \text{ N/m}$, $I = 0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $R = 0.3 \text{ m}$ 代入上式得

$$v = \sqrt{3.12x - 2.65x^2}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(3.12x - 2.65x^2)^{1/2} = 0$$

即
$$\frac{3.12 - 5.3x}{\sqrt{3.12x - 2.65x^2}} = 0$$

亦即
$$3.12 - 5.3x = 0$$

解得
$$x = 0.59 \text{ m}$$

这就是说,当滑块下滑的距离为 0.59m 时,它具有最大速率。

8. [答] 合外力矩为零。

三、问答题

1. 力矩的量纲与功或能量的量纲相同。试问,力矩是否等同于功或能量?

[答] 力矩、功和能量的量纲均为 L^2MT^{-2} 。但物理量的量纲相同,并不意味这些物理量完全等同。力矩为矢量,而功和能量均为标量。从效应角度看,力矩可以驱使物体转动而做功,从而改变物体所具有的能量。

2. 刚体的平衡条件与质点的平衡条件有何不同?

[答] 质点的平衡条件为 $\sum F_{\text{外}} = 0$, 对于刚体来说,仅有上述条件是不够的。合外力为零,只能保证刚体不发生平动,但它还可以绕定轴转动。只有当刚体所受的合外力为零,而且合外力矩也为零时,刚体才能处于平衡状态,这就是说刚体的平衡条件为

$$\begin{cases} \sum F_{\text{外}} = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$

四、计算与证明题

1. 如图 3-9 所示, 一个劲度系数为 k 的轻弹簧与一轻柔绳相连结, 该绳跨过一半径为 R , 转动惯量为 I 的定滑轮, 绳的另一端悬挂一质量为 m 的物体。开始时, 弹簧无伸长, 物体由静止释放。滑轮与轴之间的摩擦可以忽略不计。当物体下落 h 时, 试求物体的速度 v 。

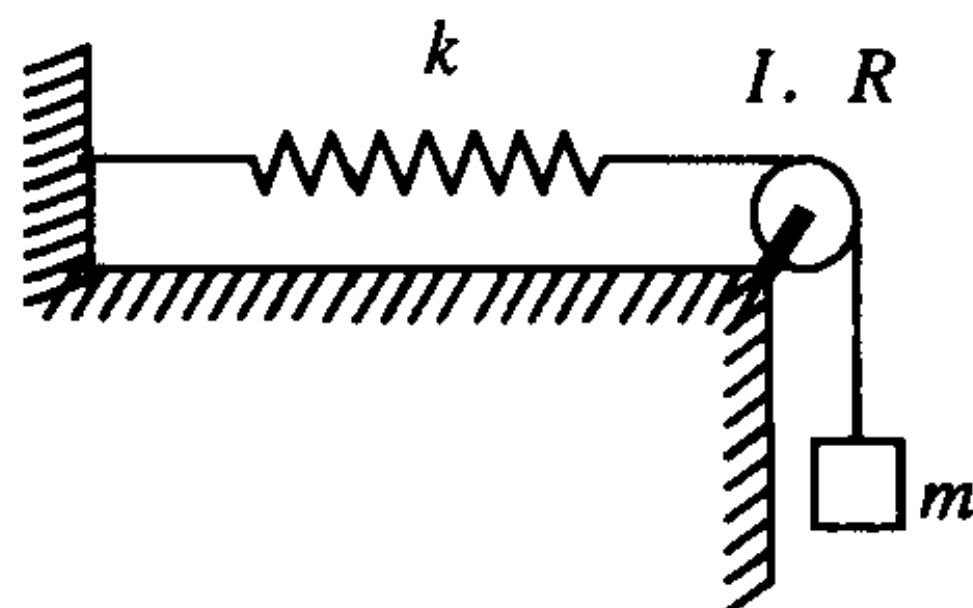


图 3-9

① 用牛顿定律和转动定律求解:

② 用守恒定律求解:

③ 若 $k = 2.0 \text{ N/m}$, $R = 0.3 \text{ m}$, $I = 0.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $m = 6.0 \text{ kg}$, $h = 0.4 \text{ m}$, 计算 v 的大小。

$$[\text{解}] \quad ① \quad \begin{cases} mg - T_1 = ma \\ (T_1 - T_2)R = I\beta \\ T_2 - kx = 0 \\ a = \beta R \end{cases}$$

$$\text{联立解得 } a = \frac{mg - kx}{m + \frac{I}{R^2}}$$

$$\text{又 } a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = \frac{mg - kx}{m + \frac{I}{R^2}}$$

$$\int_0^v v dv = \frac{1}{m + \frac{I}{R^2}} \int_0^h (mg - kx) dx$$

$$\text{解得 } v = \sqrt{\frac{2mgh - kh^2}{m + \frac{I}{R^2}}}$$

② 系统机械能守恒, 取 m 的初始位置处为势能零点, 则有

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kh^2 - mgh = 0$$

$$\omega = \frac{v}{R} \text{ 解之即可。}$$

③ 代入有关数据得 $v = 2.24 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

2. 一皮带传动装置如图 3-10 所示, A, B 两轮上套有传动皮带。外力矩 M 作用在 A 轮上, 驱使其转动, 并通过传动皮带带动 B 轮转动。A, B 两轮皆视为质量均匀分布的圆盘, 其质量分别为 m_1 和 m_2 , 半径分别为 R_1 和 R_2 。设皮带在轮上不打滑, 并略去转轴与轮之间的摩擦。试求 A, B 两轮的角加速度 β_1 和 β_2 。

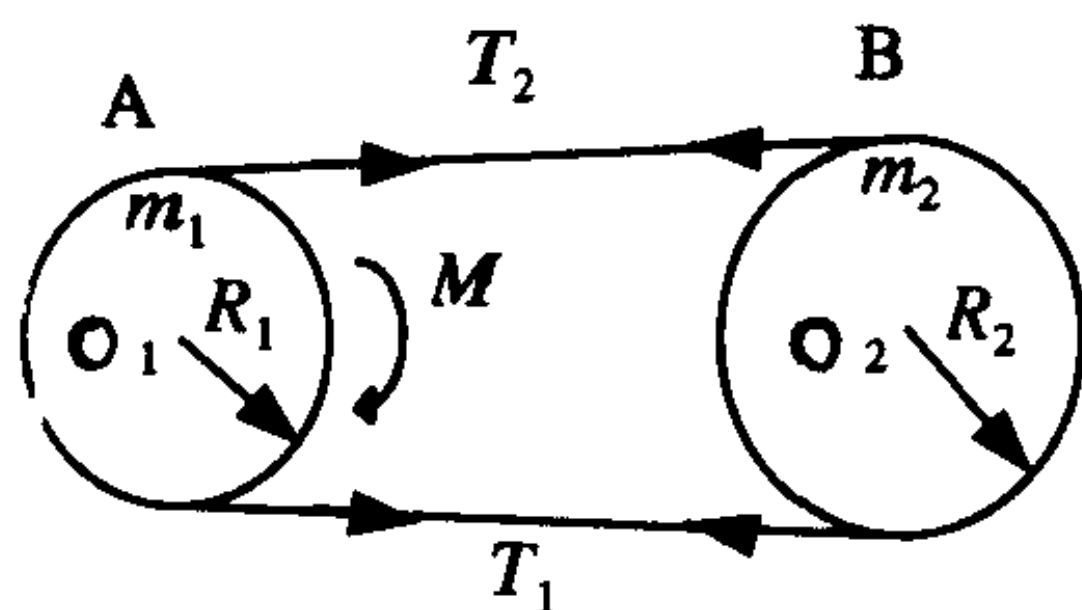


图 3-10

$$[\text{解}] \quad M - (T_1 - T_2)R_1 = \frac{1}{2}m_1R_1^2\beta_1 \quad (1)$$

$$(T_1 - T_2)R_2 = \frac{1}{2}m_2R_2^2\beta_2 \quad (2)$$

由于皮带不打滑, 切向速度相同, 其变化率即切向加速度相同:

$$R_1\beta_1 = R_2\beta_2 \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{由式(2)得 } T_1 - T_2 = \frac{1}{2}m_2R_2\beta_2 \\ \text{由式(3)得 } \beta_2 = \frac{R_1}{R_2}\beta_1 \end{array} \right\} \text{—并代入式(1)得}$$

$$\beta_1 = \frac{2M}{(m_1 + m_2)R_1^2}$$

代入式(3)得

$$\beta_2 = \frac{2M}{(m_1 + m_2)R_1R_2}$$

3. 如图 3-11 所示, 质量为 M , 长为 l 的直杆, 可绕水平轴 O 无摩擦地转动。设一质量为 m 的子弹沿水平方向飞来, 恰好射入杆的下端, 若直杆(连同射入的子弹)的最大摆角为 $\theta = 60^\circ$, 试证子弹

的速度为: $v_0 = \sqrt{\frac{(2m + M)(3m + M)gl}{6m^2}}$

[证明] 碰撞过程, 系统角动量守恒

$$mv_0 l = (ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2)\omega$$

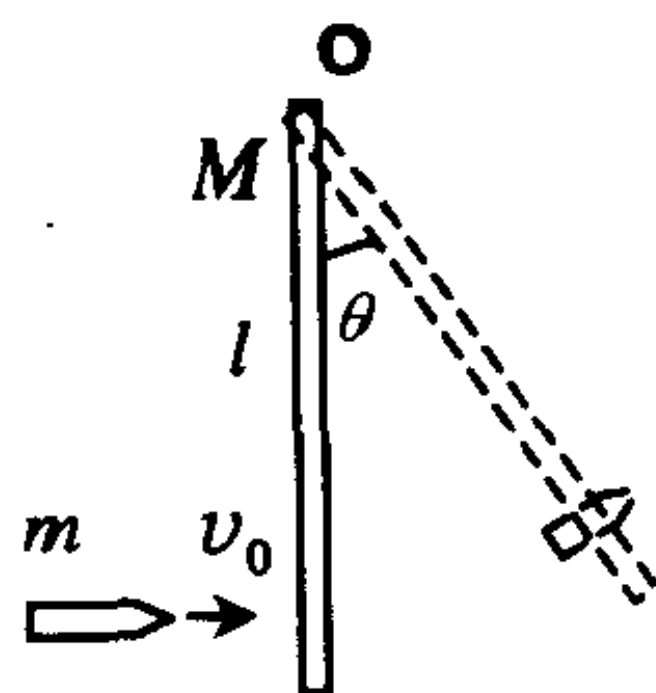


图 3-11

碰后上摆过程, 系统机械能守恒。取直杆下端为势能零点。

$$Mg \frac{l}{2} + \frac{1}{2}(ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2)\omega^2 =$$

$$mgl(1 - \cos 60^\circ) + Mgl(1 - \frac{1}{2}\cos 60^\circ)$$

取立求解即可得

$$v_0 = \sqrt{\frac{(2m + M)(3m + M)gl}{6m^2}}$$

五、附加题

1. 如图 3-12 所示, 一根细棒长为 L , 总质量为 m , 其质量分布与离 O 点的距离成正比。现将细棒放在粗糙的水平桌面上, 棒可绕过其端点 O 的竖直轴转动。已知棒与桌面间的摩擦系数为 μ , 棒的初始角速度为 ω_0 。求:

- ① 细棒对给定轴的转动惯量;
- ② 细棒绕轴转动时所受到的摩擦力矩;
- ③ 细棒从角速度 ω_0 开始到停止转动所经过的时间。

[解] ① 由题意可知细棒的质量线密度为

$$\lambda = kr$$

式中 k 为常数。由于细棒的总质量为 m , 所以

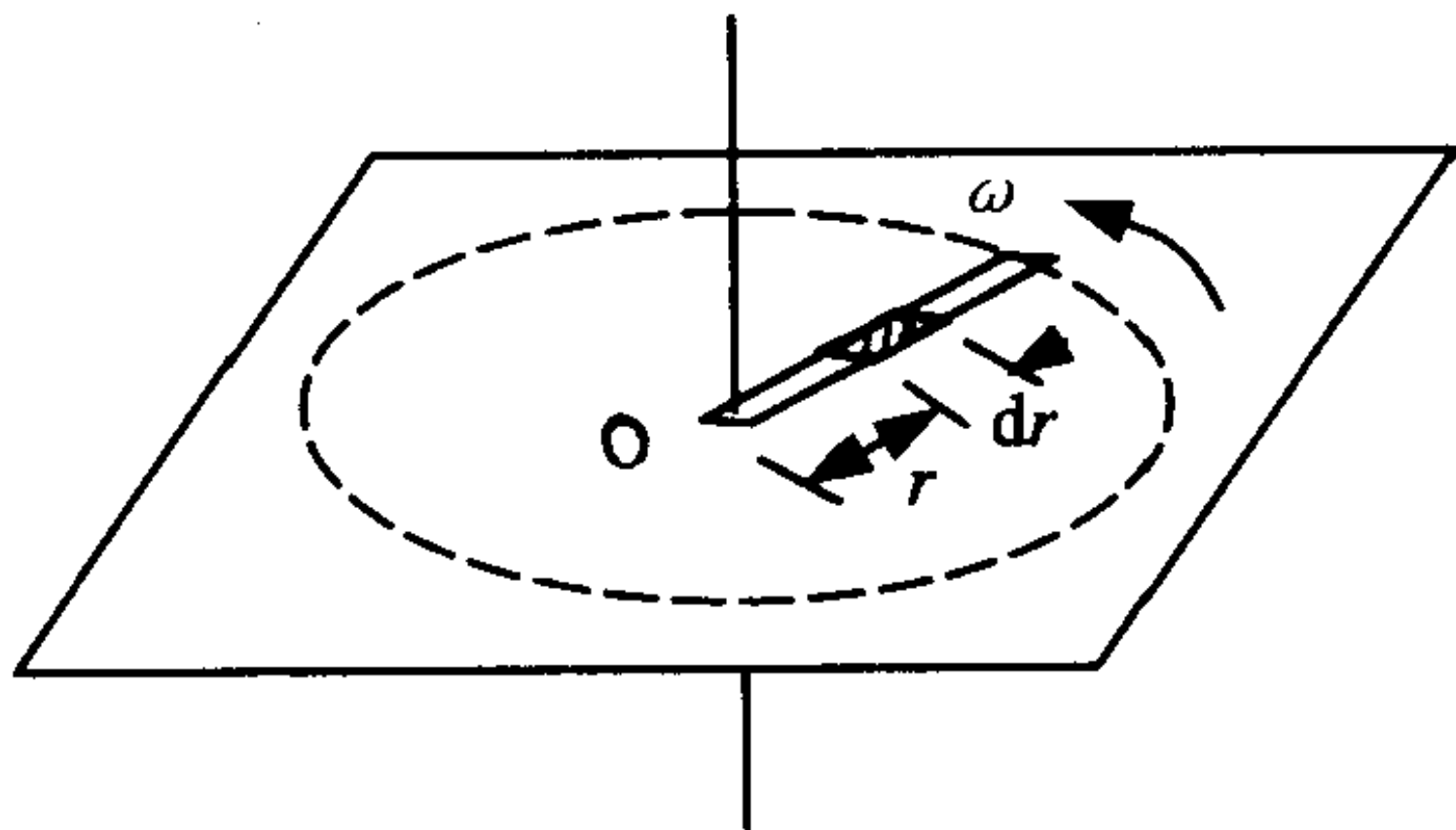


图 3-12

即

$$\int_0^L kr dr = m$$

$$\frac{1}{2}kr^2 \Big|_0^L = m$$

$$\frac{1}{2}kL^2 = m$$

由此得

$$k = \frac{2m}{L^2}$$

故

$$\lambda = kr = \frac{2m}{L^2}r$$

又

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \lambda dr$$

所以

$$I = \int_0^L \frac{2m}{L^2} r^3 dr = \frac{1}{2}mL^2$$

② 细棒上到转轴距离为 r 处的长度元 dr 所受到的摩擦力及摩擦力矩分别为

$$df = \mu g dm = \mu g \lambda dr = \frac{2m\mu g}{L^2} r dr$$

$$dM = r df = \frac{2m\mu g}{L^2} r^2 dr$$

整个细棒所受到的摩擦力矩为

$$M = \frac{2m\mu g}{L^2} \int_0^L r^2 dr = \frac{2}{3} \mu mg L$$

方向沿转轴向下。

③ 设细棒由角速度 ω_0 到停止转动所经过的时间为 t , 则由角动量定理可得

$$-Mt = 0 - I\omega_0$$

$$\frac{2}{3}\mu mgLt = \left(\frac{1}{2}mL^2\right)\omega_0$$

$$t = \frac{3\omega_0 L}{4\mu g}$$

第4章 真空中的静电场

一、选择题

1. 如图4-1所示,在坐标 $(a,0)$ 处放置一点电荷 $+q$,在坐标 $(-a,0)$ 处放置另一点电荷 $-q$,P

点是 x 轴上的任一点,坐标为 $(x,0)$ 。当 $x \gg a$ 时,P点场强 E 的大小为()。

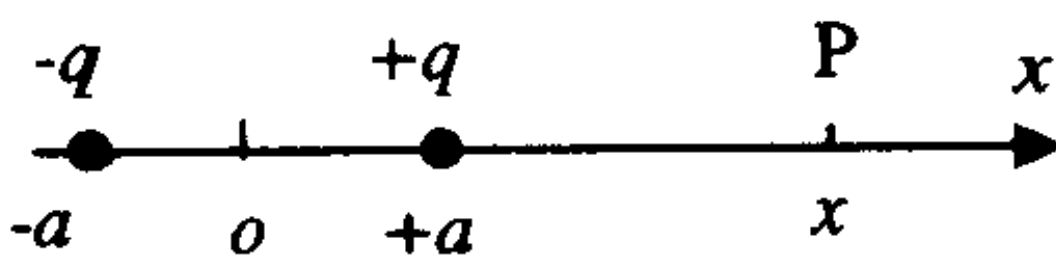


图 4-1

- A. $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}$ B. $\frac{qa}{\pi\epsilon_0 x^3}$
C. $\frac{qa}{2\pi\epsilon_0 x^3}$ D. $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$

2. 如图4-2所示,半径为 R 的半球面置于电场强度为 E 的均匀电场中,选半球面的外法线为面法线正方向,则通过该半球面的电场强度通量 Φ_E 为()。

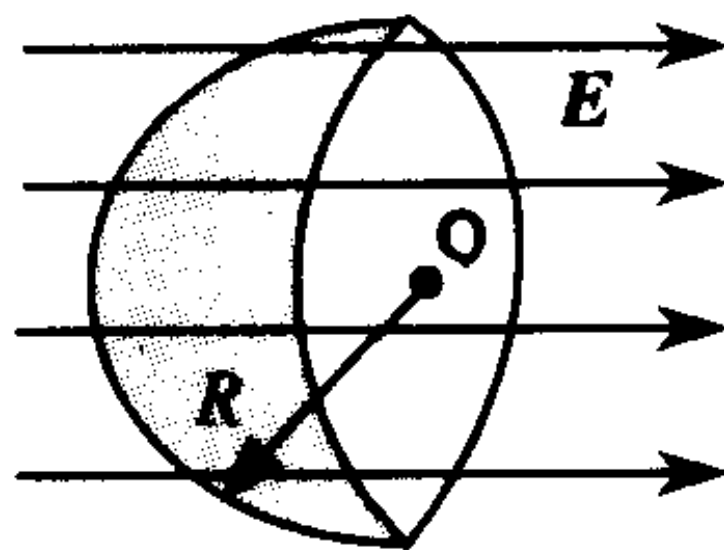


图 4-2

- A. $\pi R^2 E$ B. 0 C. $3\pi R^2 E$
D. $-\pi R^2 E$ E. $-2\pi R^2 E$

3. 在静电场中,高斯定理告诉我们()。

- A. 高斯面内不包围电荷,则面上各点 E 的量值处处为零
B. 高斯面上各点的 E 只与面内电荷有关,与面外电荷无关
C. 穿过高斯面的 E 通量,与面内电荷有关,但与面内电荷分布无关
D. 穿过高斯面的 E 通量为零,则面上各点的 E 必为零

4. 图 4-3 中所示为一沿 x 轴放置的“无限长”分段均匀带电直线, 电荷线密度分别为 $+\lambda$ ($x < 0$ 处) 和 $-\lambda$ ($x > 0$ 处), 则 Oxy 坐标面上 P 点 $(0, a)$ 处的场强 E 为()。

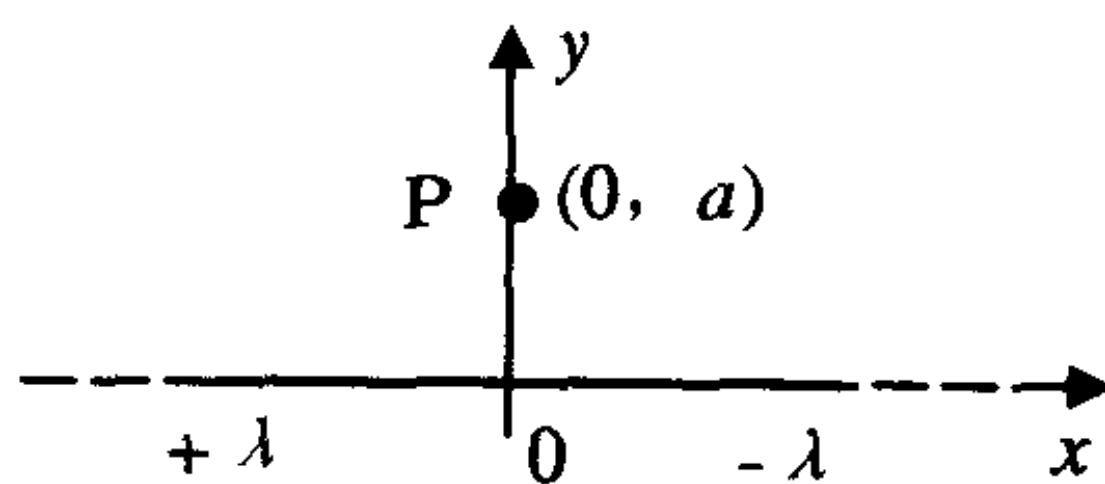


图 4-3

- A. $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} i$ B. $\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} i$
C. $\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (i + j)$ D. 0

5. 两块平行平板, 相距 d , 板面积均为 S , 分别均匀带电 $+q$ 和 $-q$, 若两板的线度远大于 d , 则它们的相互作用力的大小为()。

- A. $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}$ B. $\frac{q^2}{\epsilon_0 S}$
C. $\frac{q^2}{2\epsilon_0 S}$ D. ∞

6. 下列说法中, 正确的是()。

A. 初速度为零的点电荷置于静电场中, 将一定沿一条电场线运动

B. 带负电的点电荷, 在电场中从 a 点移到 b 点, 若电场力作正功, 则 a, b 两点的电势关系为 $U_a > U_b$

C. 由点电荷电势公式 $U = q/4\pi\epsilon_0 r$ 可知, 当 $r \rightarrow 0$ 时, 则 $U \rightarrow \infty$

D. 在点电荷的电场中, 离场源电荷越远的点, 其电势就越低

E. 在点电荷的电场中, 离场源电荷越远的点, 电场强度的量值就越小

7. 半径为 R_1, R_2 的同心球面上, 分别均匀带电 q_1 和 q_2 , 其中 R_2 为外球面半径, q_2 为外球面所带电荷量, 设两球面的电势差为 ΔU , 则()。

A. ΔU 随 q_1 的增加而增加。

- B. ΔU 随 q_2 的增加而增加。
 C. ΔU 不随 q_1 的增减而改变。
 D. ΔU 不随 q_2 的增减而改变。

8. 如图 4-4 所示, 两无限大平行平板, 其电荷面密度均为 $+\sigma$, 图中 a, b, c 三处的电场强度的大小分别为()。

- A. 0, $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$, 0
 B. $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$, 0, $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$
 C. $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$, $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
 D. 0, $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, 0

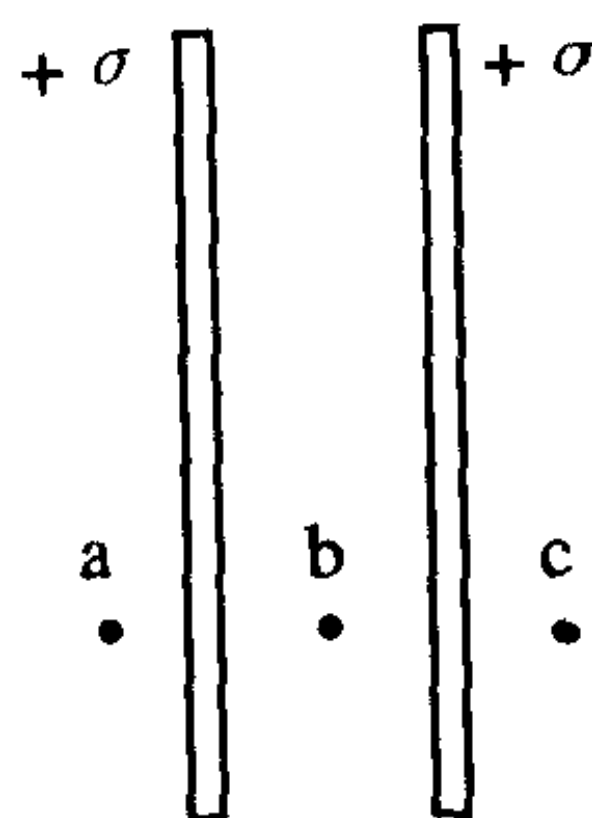


图 4-4

9. 某区域静电场的电场线分布情况如图 4-5 所示, 一负电荷从 M 点移到 N 点, 有人根据此图得出下列几点结论, 其中哪点是正确的?()

A. 电场强度 $E_M > E_N$, 电场力做正功;

B. 电势 $U_M < U_N$, 电场力做负功;

C. 电势能 $W_M < W_N$, 电场力做负功;

D. 负电荷电势能增加, 电场力做正功。

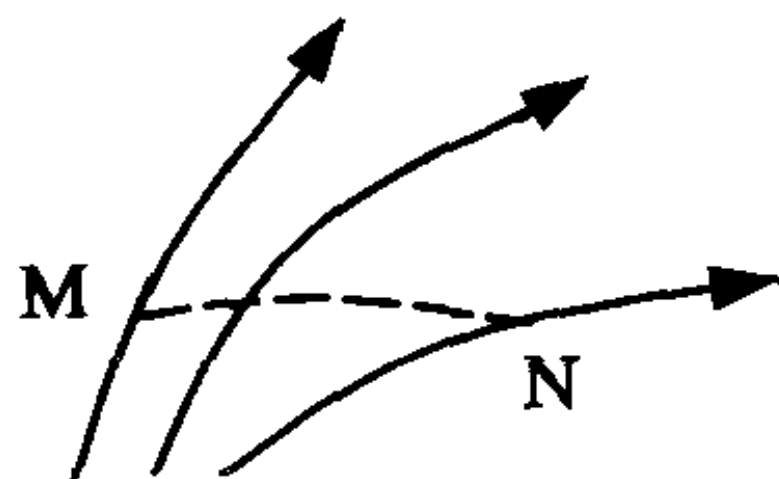


图 4-5

10. 在静电场中, 下列说法正确的是()。

A. 电场强度 $E = 0$ 的点, 电势也一定为零

B. 同一条电场线上各点的电势不可能相等

C. 在电场强度相等的空间内, 电势也处处相等

D. 在电势相等的三维空间内, 电场强度处处为零

选择题解答

1. [解] 本题正确答案为(B)。

$$E = E_+ + E_- =$$

$$\left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0(x-a)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x+a)^2} \right] i$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4ax}{(x^2 - a^2)^2}$$

因为 $x \gg a$, 忽略 a 的二级小量, 上式简化为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4ax}{x^4} = \frac{qa}{\pi\epsilon_0 x^3}$$

2. [解] 本题正确答案为(D)。

方法是: 在半球面的右边过圆心补上一个同半径的圆底面, 使之和半球面一起构成一个封闭曲面, 由高斯定理可知

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{曲面内包围的电荷为零})$$

即
$$\iint_{\text{半球}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\text{圆底面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

而
$$\iint_{\text{圆底面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E\pi R^2$$

所以
$$\Phi_E = \iint_{\text{半球}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -E\pi R^2$$

3. [解] 本题正确答案为(C)。

对于静电场的高斯定理 $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \Sigma q$ 的正确理解, 应注意三个物理量之间的联系与区别。一是通过闭合曲面的电通量 $\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$; 电通量只和曲面内包围的电荷有关, 曲面外的电荷及分布对电通量的贡献为零, 所以 $\Sigma q = 0$, 则 $\Phi_E = 0$; 二是曲面上各点的电场强度 E ; $\Phi_E = 0$ 并不说明曲面上各点的场强 E 也处处为零。因为场强 E 是空间所有电荷在高斯面上 dS 处场的矢量迭加, 这些

电荷包含了曲面内外的电荷。三是电通量和曲面内电荷的分布无关。因为,用形象描述法可知,电通量就是通过曲面的电场线的总和,一个点电荷向空间发出的电场线是一定的,和电荷处在何位置无关。

4. [解] 本题正确答案为(A)。

如图 4-6 所示,先来计算一根长度为 l 的均匀带电直线在过其一端的垂面上任一点 P 的场强。电荷元 dq 在 P 点的场强 dE 的大小为

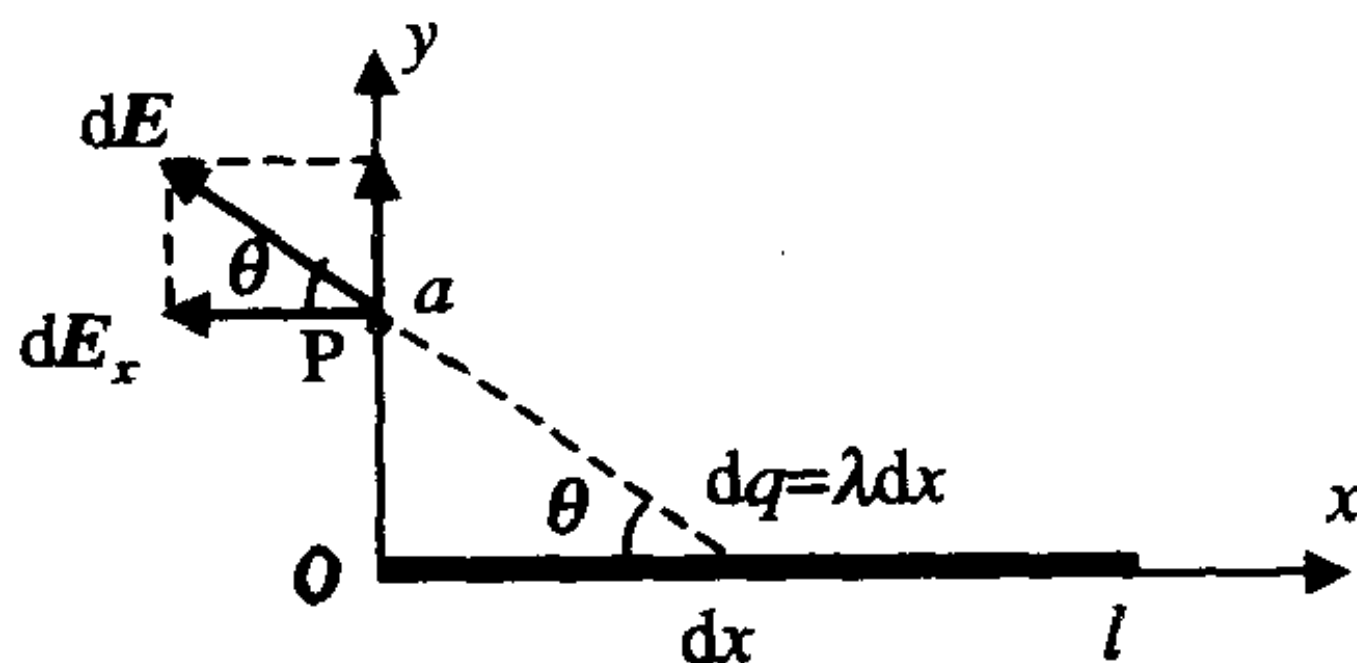


图 4-6

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}, \quad \text{方向如图 4-6 所示}$$

则
$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$dE_y = dE \sin \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{a dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

分别积分可得:

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + l^2}} - \frac{1}{a} \right)$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{a dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{l}{\sqrt{l^2 + a^2}}$$

当 $l \rightarrow \infty$ 时,可得半无限长均匀带电直线在其一端垂面上任一点的场强:

$$|E_x| = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$|E_y| = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}$$

可见 $|E_x| = |E_y|$, 所以场强 E 的方向与带电直线夹角

$1\theta = 45^\circ$ 。

对于题目给出的“无限长”分段均匀带电直线，可看成是两段半无限长均匀带电直线的电场迭加。两段半无限长带电直线在P点的场强的方向如图4-7所示。迭加后的场强E为

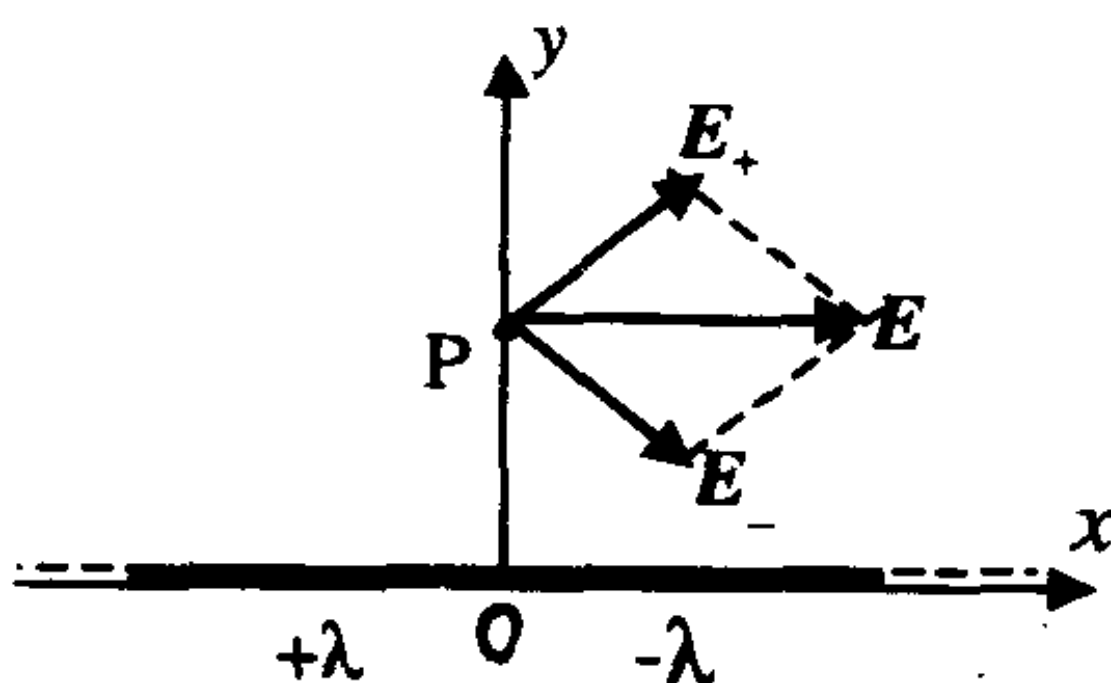


图 4-7

$$E = E_+ + E_- = E_+ \cos 45^\circ i + E_- \cos 45^\circ i =$$

$$2E_+ i = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} i$$

5. [解] 本题的正确答案为(C)。

一个电荷元 dq 在外电场受到的电场力为

$$dF = dqE$$

本题可看成一块带电平板处在另一块带电平板的电场中。

已知一块无限大的均匀带电平板在其附近空间产生的场强大小为 $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{q}{2\epsilon_0 S}$ ，是均匀电场。那么另一块与其平行的带电平板在此电场中的受力为

$$F = \int dqE = E \int dq = Eq = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S}$$

6. [解] 本题正确答案为(E)。

对于题目给出的 A, B, C, D, E 五种说法分别给出下面的分析判断：

(1) 一个点电荷在电场中的受力为 $F = qE$ ，这只说明点电荷在运动时加速度 $a = \frac{F}{m} = \frac{q}{m}E$ 是在电场线的切线方向。但是 $a = \frac{dv}{dt}$ ，故并不能说明速度的方向也时刻沿电场线的切线方向，而速度的方向才是电荷的运动方向。所以说法 A 是错误的。

(2) 电场力是保守力, 电场力作正功等于电荷在电场中电势能的减少, 即

$$A_{ab} = W_a - W_b = (-qU_a) - (-qU_b) = q(U_b - U_a)$$

现已知 $A_{ab} > 0$, 则 $U_b - U_a > 0$, $U_b > U_a$ 。

所以说法 B 也是错误的。

(3) 点电荷是一个理想模型, 也是一个相对的概念, 当一个带电体自身的线度和所考查的电场区域相比较很小时, 就可以忽略掉带电体自身的形状和大小而简单地视作点电荷。但是当考察的空间区域与带电体自身的线度相比并不大很多时, 带电体就不能被视作点电荷。所以, 如果一个带电体的几何线度为 a_0 , 当 r 的值接近 a_0 时, 带电体已不能视作点电荷, 故此时公式 $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 已失效。 $r \rightarrow a_0$ 处的电势应该另外表示。

所以说法 C 是错误的。

(4) 电势是一个相对值, 而不是绝对值。电场中某点电势 U_P 的大小是相对于所选择的电势零点 P_0 而言的, 即

$$U_P = \int_P^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = U_P - U_{P_0} \quad (\text{而 } U_{P_0} = 0)$$

因此, 必须在明确了电势零点选在何处时, 说电势的高低才有意义。

若选择无穷远点为电势零点 $U_\infty = 0$, 那么, 对于一个点电荷而言, 在距离点电荷为 r 的场点处, 其电势为 $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ 。所以, 对于一个 $+q$ 的电场, r 越大, 则电势越低; 但对一个 $-q$ 的电场, r 越大, 则电势越高。

所以说法 D 是十分不确切的。

(5) 点电荷的电场 $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$, 显然离场源电荷越远的点, r 越大, 则 E 越小。

所以只有说法 E 是正确的。

7. [解] 本题的正确答案为(A)。

如图 4-8 所示, 电荷 q_1, q_2 将空间划分成三个区域, 由高斯定理可解得这三个区域的场强分别为

$$r < R_1: \quad E_1 = 0$$

$$R_1 < r < R_2 \quad E_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$r > R_2: \quad E_3 = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

两球面的电势差

$$\begin{aligned} \Delta U &= \int_{R_1}^{R_2} E_2 dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

上式说明 ΔU 和 q_1 成正比而和 q_2 无关。

8. [解] 本题的正确答案为(B)。

一个无限大带电平面在两侧的场强是

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

如图 4-9 建立坐标系, 则 a, b, c 三点的场强分别为

$$E_a = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}i - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}i = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}i$$

$$E_b = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}i - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}i = 0$$

$$E_c = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}i + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}i = \frac{\sigma}{\epsilon_0}i$$

9. [解] 本题的正确答案是(C)。

电场力移动负电荷的功

$$A = -q \int_M^N E \cos \theta dl$$

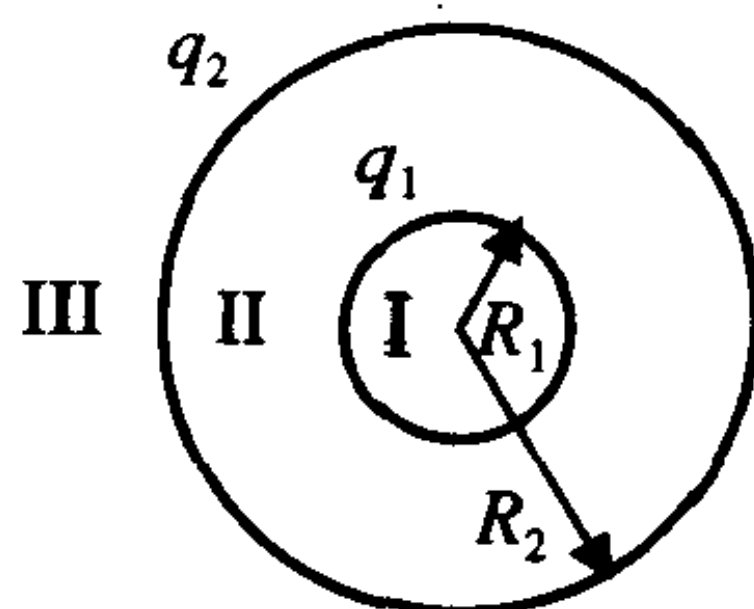


图 4-8

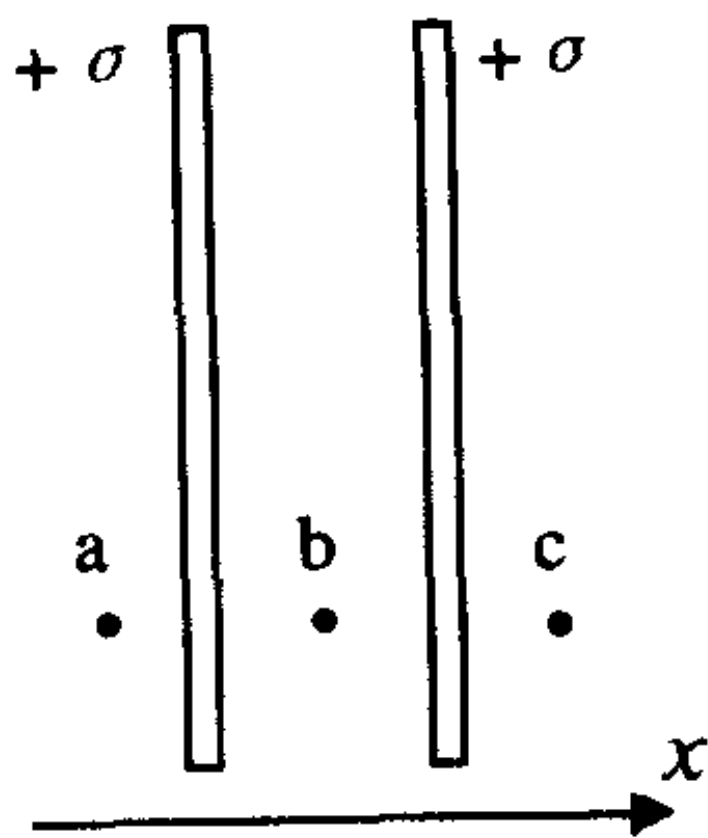


图 4-9

如图可知 $\cos\theta > 0$, 所以 $A < 0$ 。又因为

$$A = W_M - W_N = (-qU_M) - (-qU_N) < 0$$

所以可知电场力移动负电荷从M点到N点电场力作负功; 负电荷在M点的电势能低于在N点的电势能; M点的电势高于N点的电势。

10. [解] 本题的正确答案是(B,D)。

在静电场中场强和电势的关系为

$$E = -\text{grad}U, \quad U = \int_P^{P_0} E \cdot dl$$

可见空间任一点的场强和电势不是一一对应的关系。某点的场强大小和该点附近电势的空间变化率成正比; 某点的电势和从该点到电势零点间的整个场强分布有关。所以分别说明如下:

(1) 电场强度 $E = 0$, 只能说明该点处 $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$, $U = \text{常量}$, 但一般 $U \neq 0$ 。所以说法 A 是错误的。

(2) 在同一条电场线上 a, b 两点间的电势差

$$U_a - U_b = \int_a^b E \cdot dl = \int_a^b E dl \neq 0$$

所以同一条电场线上各点的电势不相等, 说法 B 是正确的。

(3) 在电场强度相等的空间任选两点 a, b, 其电势差 $U_a - U_b = \int_a^b E \cdot dl = EL_{ab} \neq 0$ (其中 L_{ab} 是 a, b 两点在平行于电场方向的距离), 所以一般地, $U_a \neq U_b$ 。所以说法 C 是错误的。

(4) 在电势相等的三维空间内, 任选两点 a, b, 有

$$U_a - U_b = \int_a^b E \cdot dl = 0$$

由于 $dl \neq 0$, 只有 E 处处为零。比如一个均匀带电球壳的内部空间, 其电势 $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$, 而 $E = 0$ 。所以说法 D 也是正确的。

二、填空题

1. 一均匀带电细圆环, 半径为 R , 总电量为 q , 环上有一极小的缺口, 缺口长度为 d ($d \ll R$), 如图 4-10 所示。细圆环在圆心处产生的场强大小 $E =$ _____, 方向为 _____。

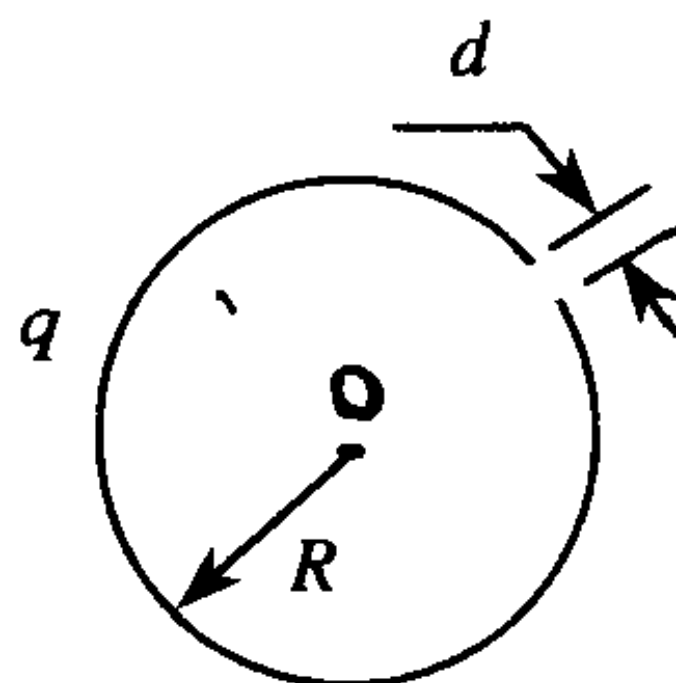


图 4-10

2. 有两点电荷, 电量均为 $+q$, 相距为 $2a$, 如图 4-11 所示。若选取如图所示的球面 S , 则通过 S 面的电场强度通量 $\Phi_0 =$ _____; 若在 S 面上取两块面积相等的面元 S_1, S_2 , 则通过 S_1, S_2 面元的电场强度通量 Φ_1, Φ_2 的大小关系为 Φ_1 _____ Φ_2 。

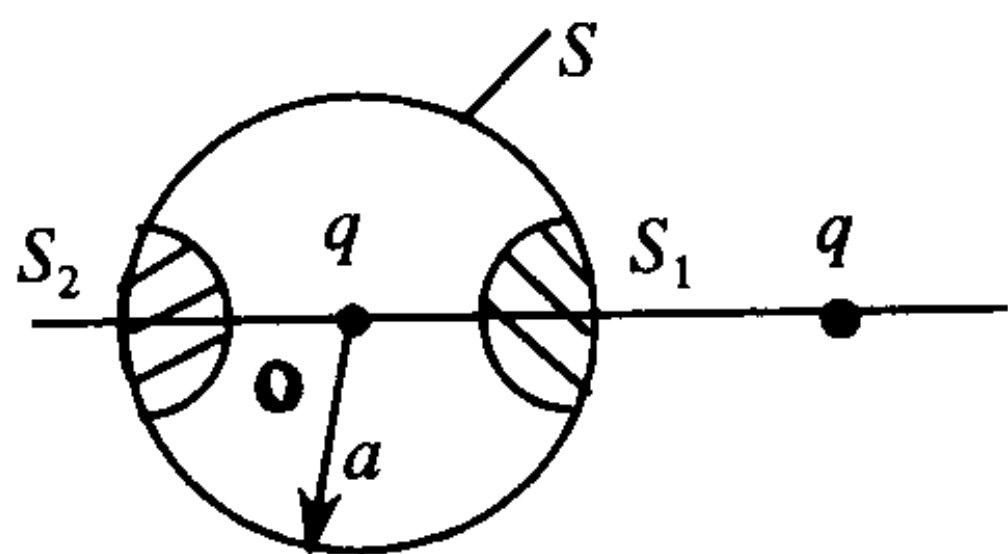


图 4-11

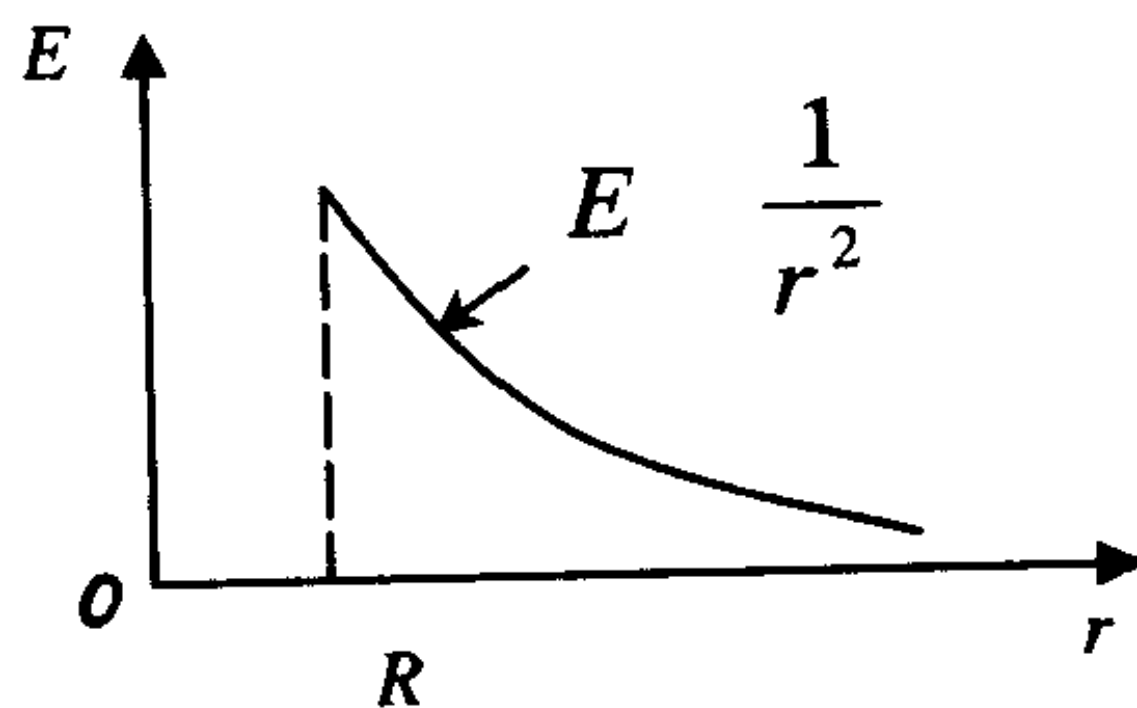


图 4-12

3. 图 4-12 所示曲线, 表示某种球对称性静电场的场强大小 E 随径向距离 r 变化的关系。请指出该电场是由那一种带电体产生的: _____。

4. 地球表面上方大气中电场方向向下, 设在地面上方 h_1 高处场强为 E_1 , 在 h_2 高处场强为 E_2 ($h_1, h_2 \ll R_{\text{地}}$), 由高斯定律可推知大气中的平均电荷密度为 $\rho =$ _____。实验监测测得: $h_1 = 100 \text{ m}$ 高处 $E_1 = 150 \text{ V/m}$, $h_2 = 300 \text{ m}$, 高处 $E_2 = 100 \text{ V/m}$ 大气中的平均电荷密度 $\rho =$ _____。

5. 如图 4-13 所示, A, B 两点与 O 点分别相距为 5cm 和 20cm, 位于 O 点的点电荷 $Q = 10^{-9}\text{C}$ 。若选 A 点的电势为零, 则 B 点的电势 $U_B =$ _____; 若选无穷远处为电势零点, 则 $U_B =$ _____。

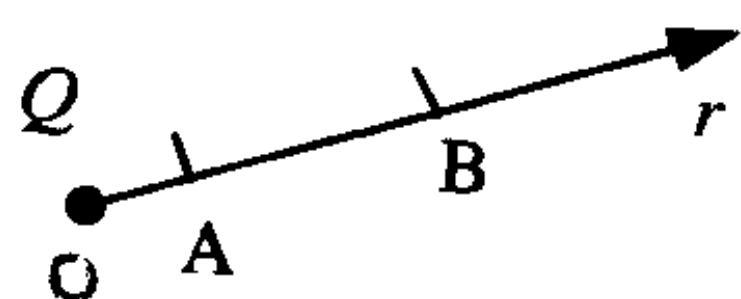


图 4-13

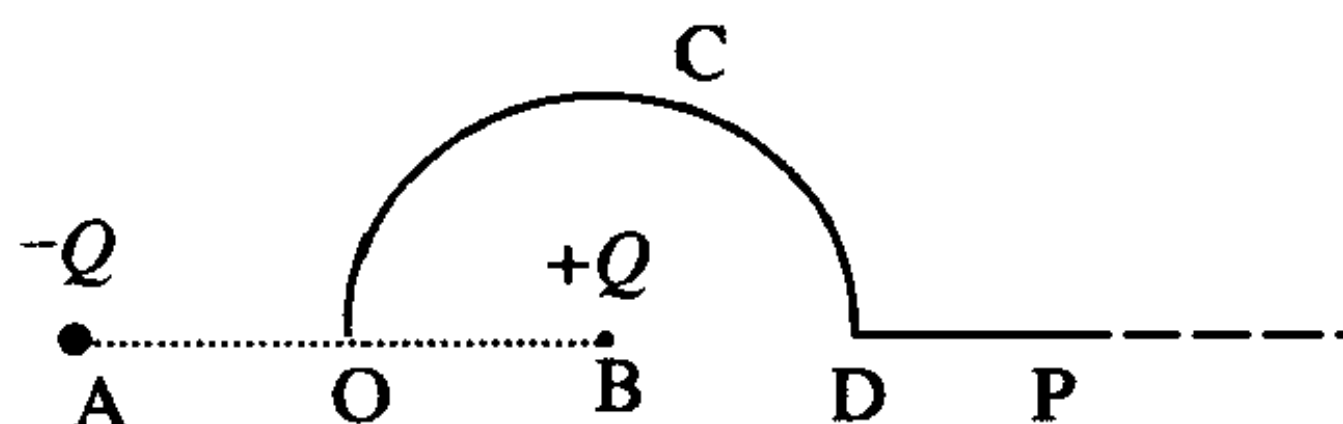


图 4-14

6. 如图 4-14 所示, A, B 两点相距为 $2R$, A 点有点电荷 $-Q$, B 点有点电荷 $+Q$, 以 B 点为圆心、半径为 R 作一半圆弧 OCD。若将一试探电荷 $+q$ 从 O 点沿路径 OCDP 移到无穷远处, 并设无穷远处为电势零点, 则 $+q$ 在 D 点的电势能 $W_D =$ _____, 电场力作的功 $A_{0\infty} =$ _____; $A_{OD} =$ _____; $A_{D\infty} =$ _____。

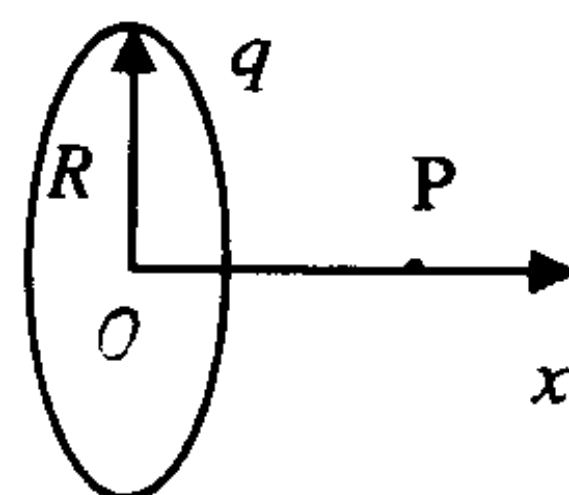


图 4-15

7. 如图 4-15 所示, 电量 $q (q > 0)$ 均匀分布在一半径为 R 的圆环上, 在垂直于环面轴线上任一点 P 的电势 U_P _____; 电场强度 E 与电势梯度的关系为 _____, 并由此可求得 $E_P =$ _____。

8. 两个半径分别为 R 和 $2R$ 的同心均匀带电球面, 内球荷电 $+q$, 外球荷电 Q , 选无穷远为电势零点, 则内球面电势为 $U =$ _____; 欲使内球电势为零, 则外球面上的电量 $Q =$ _____。

9. 静电场的高斯定理 $\oiint_S E \cdot dS = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$, 表明静电场是 _____; 静电场的环路定理 $\oint_L E \cdot dl = 0$, 表明静电场是 _____。

填空题解答

1. [解] 可用补偿法来解此题。在缺口处补上 $\pm dq$ 的电荷, 构成一个均匀带电圆环和一个电荷元 $-dq$ 在圆心处的场强的迭加。由对称性可知, 一个均匀带电圆环在圆心处产生的场强为零, 所以圆心处的场强

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-dq}{R^2}, \quad dq = d\lambda = \frac{q}{2\pi R} d$$

所以 $E = \frac{1}{8\pi^2\epsilon_0} \frac{q}{R^3} d$, 方向由圆心指向缺口。

2. [解] 由高斯定理知, 穿过闭合曲面的电通量只和曲面内包围的电荷有关。所以对球面 S

$$\Phi_0 = \oiint_S E \cdot dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

取球面的外法线方向为正, 对球面 S 上的 S_1 和 S_2 亦如此。那么, 球内电荷对 S_1 和 S_2 的通量均大于零, 分别用 $\Phi_{1内}$ 和 $\Phi_{2内}$ 表示; 球外电荷对 S_1 的通量小于零, 用 $\Phi_{1外}$ 表示, 对 S_2 的通量大于零, 用 $\Phi_{2外}$ 表示, 显然

$$\Phi_1 = \Phi_{1内} - \Phi_{1外}, \quad \Phi_2 = \Phi_{2内} + \Phi_{2外}$$

所以 $\Phi_1 < \Phi_2$ 。

3. [解] 由题给曲线可知, $r < R$ 的区域内, $E = 0$, 由高斯定理可知, 作一个 $r < R$ 的球形高斯面, 则

$$\oiint E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q = 0$$

说明在 $r < R$ 的区域内无电荷分布。

在 $r > R$ 的区域内, 电场呈球对称分布。

由以上分析可知, 这是一个均匀带电球壳产生的电场。

4. [解] 如图 4-16, 在地球表面上方过 h_1 和 h_2 高度作一柱形高斯面, 如图所示, 高斯面底面积为 ΔS 。

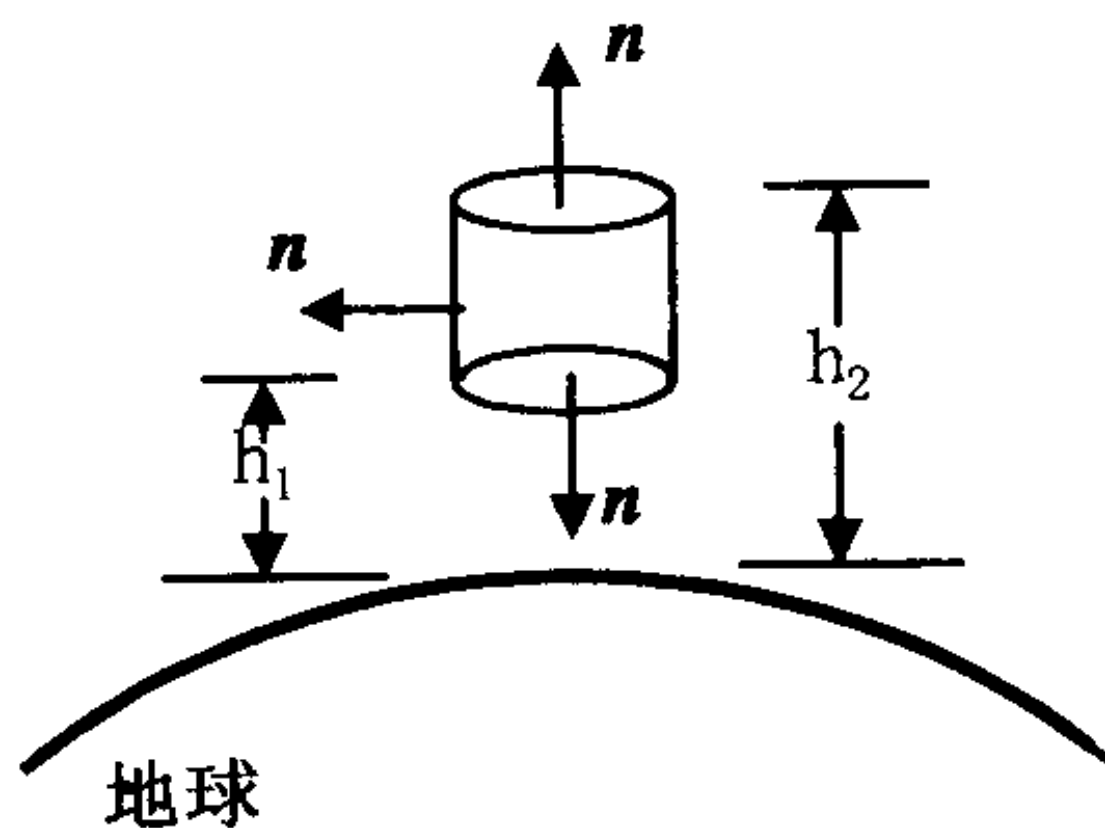


图 4-16

由高斯定理可知

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\text{上底}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\text{下底}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\text{侧}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$$

得 $\sum q = \epsilon_0 [-E_2 \Delta S + E_1 \Delta S + 0] = \epsilon_0 \Delta S (E_1 - E_2)$

所以, 大气中的平均电荷密度为

$$\rho = \frac{\sum q}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 \Delta S}{\Delta S (h_2 - h_1)} (E_1 - E_2) = \epsilon_0 \frac{(E_1 - E_2)}{h_2 - h_1}$$

将已知量代入可得:

$$\rho = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times (150 - 100)}{200} = 2.21 \times 10^{-12} \text{ C/m}^3$$

5. [解] 由电势的定义 $U_P = \int_P^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 可知:

(1) 选 $U_A = 0$, 则

$$U_B = \int_B^A \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \int_{0.05}^{0.20} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = -135 \text{ V}$$

(2) 选 $U_\infty = 0$, 则

$$U_B = \int_B^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \int_{0.20}^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = 45 \text{ V}$$

6. [解] 电场力移动点电荷从 a 到 b 点作的功为

$$A_{ab} = q \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q(U_a - U_b) = W_a - W_b$$

所以此题的关键是求出 $+Q$ 和 $-Q$ 在 O 点、D 点和 ∞ 点的电势。

选无穷远点为电势零点, 则

$$U_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = 0$$

$$U_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{3R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = \frac{Q}{6\pi\epsilon_0 R}$$

则 $+q_0$ 在 D 点的电势能

$$W_D = q_0 U_D = \frac{q_0 Q}{6\pi\epsilon_0 R}$$

电场力移动 $+q_0$ 从 O 点到 ∞ 点的功为

$$A_{o\infty} = q_0(U_o - U_\infty) = 0$$

电场力移动 $+q_0$ 从 O 点到 D 点的功为

$$A_{oD} = q_0(U_o - U_D) = -\frac{q_0 Q}{6\pi\epsilon_0 R}$$

电场力移动 $+q_0$ 从 D 点到 ∞ 点的功为

$$A_{D\infty} = q_0(U_D - U_\infty) = \frac{q_0 Q}{6\pi\epsilon_0 R}$$

7. [解] 在圆环上任选一电荷元 dq , 如选无穷远处为电势零点, 则 dq 在 P 点的电势为

$$dU_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

整个圆环在 P 点的电势为

$$U_P = \oint dU_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \oint dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

由场强和电势的关系知 $E_x = -\frac{dU_P}{dx}$, 故

$$E_P = -\frac{dU}{dx} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

8. [解] 由高斯定理可知空间的场强分布为

$$r < R: \quad E_1 = 0$$

$$R < r < 2R: \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

$$r > 2R: \quad E_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q+Q}{r^2}$$

选无穷远处为电势零点, 则内球电势为

$$\begin{aligned} U &= \int_R^\infty E \cdot dr = \int_R^{2R} E_2 dr + \int_{2R}^\infty E_3 dr = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R} + \frac{Q+q}{4\pi\epsilon_0 2R} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R} + \frac{Q}{2R} \right) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 R} (2q + Q) \end{aligned}$$

欲使内球电势为零, 可知必须有

$$2q + Q = 0, \quad \text{即 } Q = -2q。$$

三、问答题

1. 电场强度 E 和电势 U 是描写电场分布的两个物理量, 它们有什么样的区别和联系? 若用场叠加原理计算场强 E 和电势 U , 应注意什么?

[答] 电场强度 $E = F/q$ 是从力的角度对电场分布的描述, 它给出了一个矢量场分布的图像; 而电势 $U = W/q$ 是从能量和功的角度对电场分布的描述, 它给出了一个标量场分布的图像。

空间任一点的电场强度 E 和该点的电势 U 之间并没有一对一的关系。二者的关系是

$$E = - \text{grad} U = - \frac{dU}{dn}$$

$$U = \int_P^{P_0} E \cdot dl$$

即空间任一点的场强 E 和该点附近电势的空间变化率相联

系；空间任一点的电势和该点到电势零点的整个空间的场强分布相联系。

由于电场强度 E 是矢量，利用场迭加原理计算时，应先将各电荷元产生的电场 dE 进行分解，再按方向进行合成，即

$$dE = dE_x i + dE_y j + dE_z k$$

$$E_x = \int dE_x, \quad E_y = \int dE_y, \quad E_z = \int dE_z$$

而电势是标量可直接进行迭加，即

$$U = \int dU$$

但用这种方法求电势时，应注意电荷是否分布在有限空间及电势零点的选择，最好选无穷远点为电势零点。

四、计算与证明题

1. 均匀带电细线 ABCD 弯成如图 4-17 所示的形状，电荷线密度为 λ ，坐标选取如图 4-17 所示，试证明：

① 圆心 O 处的场强

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} j;$$

② 圆心 O 处的电势

$$U = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} (2\ln 2 + \pi).$$

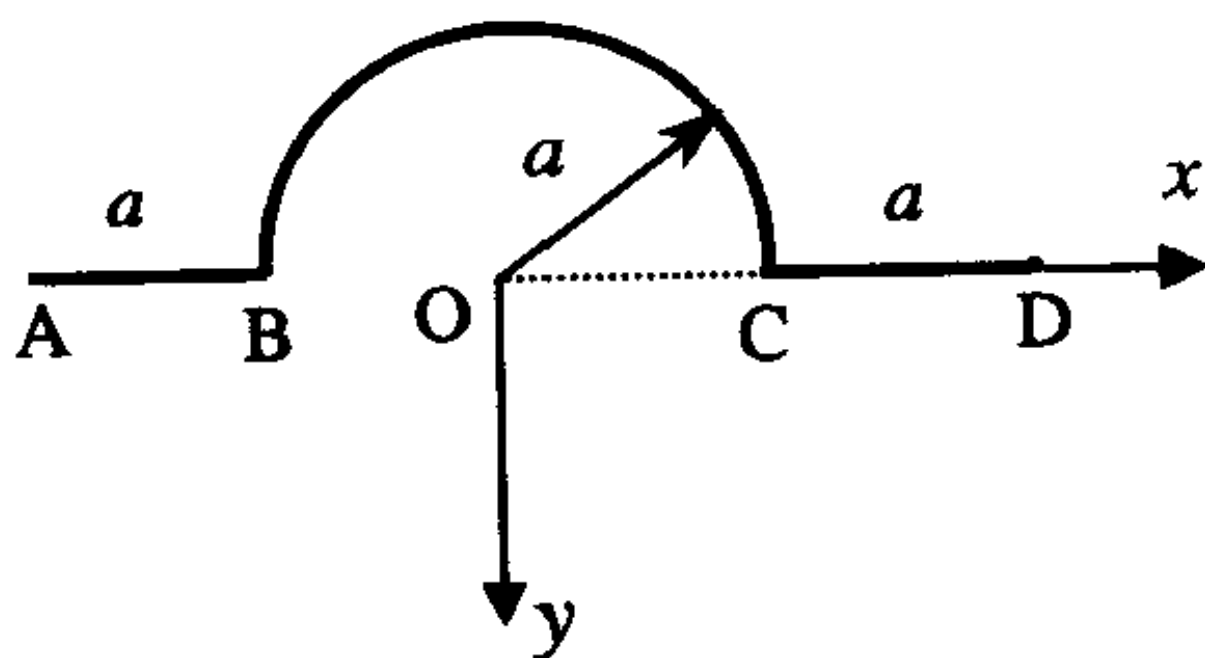


图 4-17

[证] ① 根据对称性分析，两段带电直线各自在 O 点的电场强度大小相等、方向相反，相互抵消，所以只计算带电细线半圆形部分的电场。

取电荷元 $dq = \lambda dl$ ，相应的 dE 在图 4-18 中画出。

设 dE 和 y 轴夹角为 θ ，其大小 $dE = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 a^2}$

根据对称性分析可知,

$$E_x = 0$$

$$dE_y = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cos\theta d\theta$$

$$E_y = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} j$$

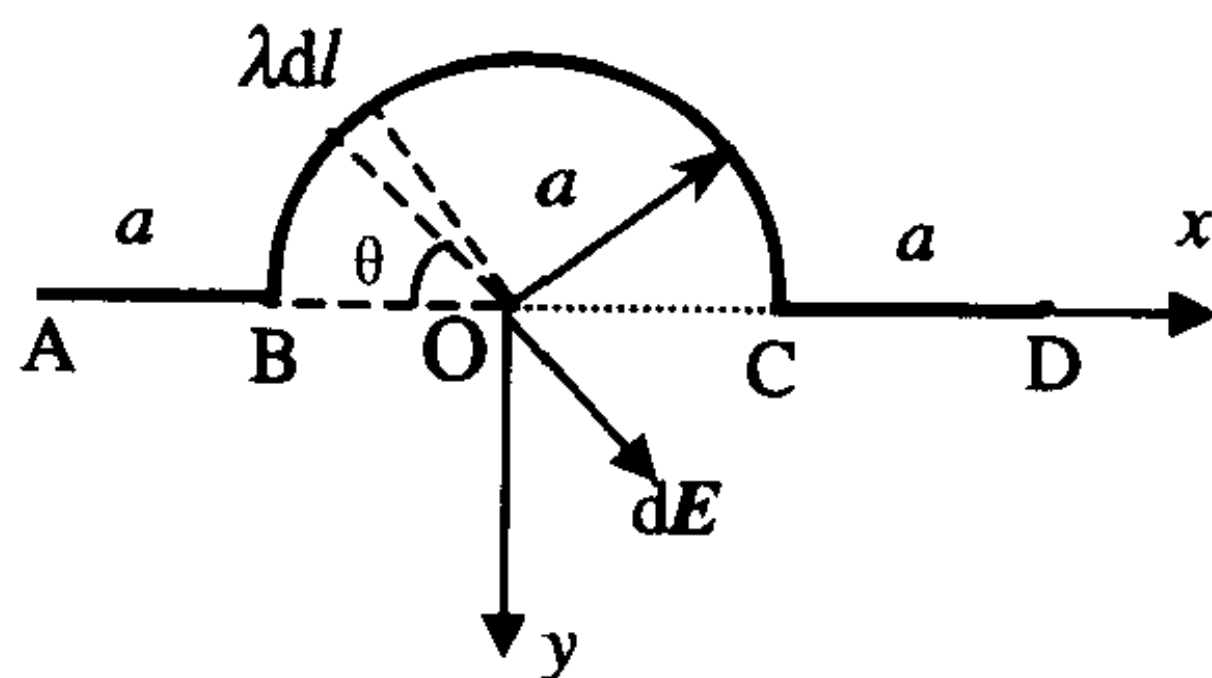


图 4-18

② 在带电直线部分任取一电荷元 $dq = \lambda dl$, 设电荷元至 O 点距离为 l , 则该电荷元在 O 点电势为

$$dU_1 = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 l}$$

$$U_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2a} \frac{dl}{l} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln 2$$

两段带电直线在 O 点电势相同, 迭加为 $2U_1$, 半圆形带电直线上任一电荷元在 O 点电势为

$$dU_2 = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$U_2 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^{2a} dl = \frac{\lambda\pi}{4\pi\epsilon_0}$$

$$U = 2U_1 + U_2 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} (2\ln 2 + \pi)$$

得证。

2. 如图 4-19 是一个荷电量为 Q 、半径为 R 的均匀带电球体。

① 用高斯定理计算电场强度在球内外空间的分布, 并画出 $E-r$ 曲线;

② 根据电势与电场强度的关系, 确定电势在球内外空间的分

布,并画出 $U-r$ 曲线;

③ 若球内电荷沿径向分布不均匀,电荷体密度 $\rho(r) = \frac{Q}{2\pi R^2 r}$, 试证明,球内的电场强度为一恒量 $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ 。

[解] ① 因电荷分布具有球对称性,用电场迭加原理分析可知:电场分布也具有相同的球对称性。作一半径为 r 的同心球形高斯面,根据高斯定理有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \oint_S dS = E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$$

当 $r < R$ 时

$$\sum q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{r^3}{R^3} Q$$

所以

$$E_{\text{内}} \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3} Q$$

故

$$E_{\text{内}} = \frac{Qr}{4\pi R_0 R^3} \quad (r < R)$$

当 $r > R$ 时,

$$\sum q = Q$$

所以

$$E_{\text{外}} 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

故

$$E_{\text{外}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R)$$

其 $E-r$ 分布曲线如图 4-20 所示。

② 选无穷远点为电势零点。

球内任一点的电势为

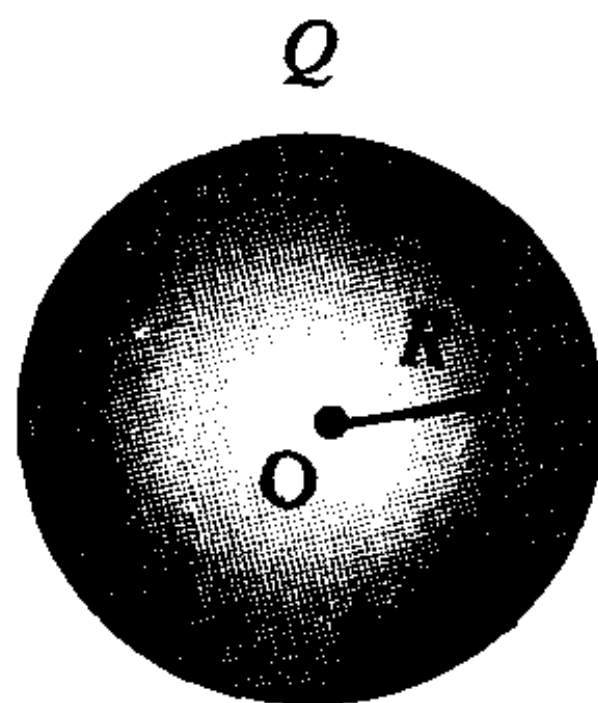


图 4-19

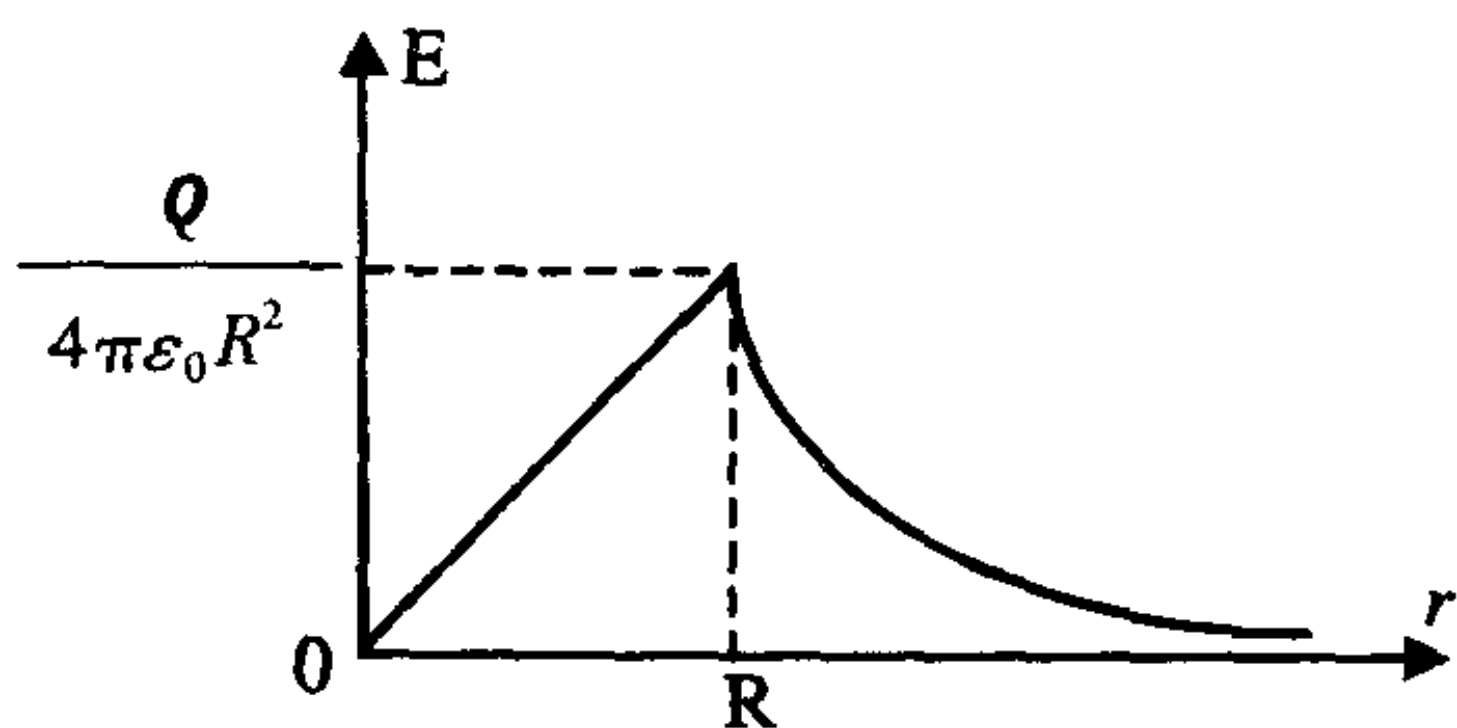


图 4-20

$$\begin{aligned}
 U_{\text{内}} &= \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^R E_{\text{内}} dr + \int_R^{\infty} E_{\text{外}} dr = \\
 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_r^R dr + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \\
 &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (R^2 - r^2) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}
 \end{aligned}$$

化简得 $U_{\text{内}} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (r < R)$

球外任一点的电势为

$$\begin{aligned}
 U_{\text{外}} &= \int_r^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_r^{\infty} E_{\text{外}} dr = \\
 &= \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}
 \end{aligned}$$

即 $U_{\text{外}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R)$

$U-r$ 分布曲线如图 4-20 所示。

③ 作一半径为 r 的球形高斯面, 根据高斯定理有

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E \oiint_S dS = E \times 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$$

球内 $r < R$ 处, 高斯面内所包围的电荷量 $\sum q$ 的计算方法是: 作一半径为 r' ($r' < r$), 厚度为 dr' 的薄球壳, 薄球壳内的电荷量为

$$dq = \rho(r') dv = \frac{Q}{2\pi R^2} \frac{1}{r'} 4\pi r'^2 dr'$$

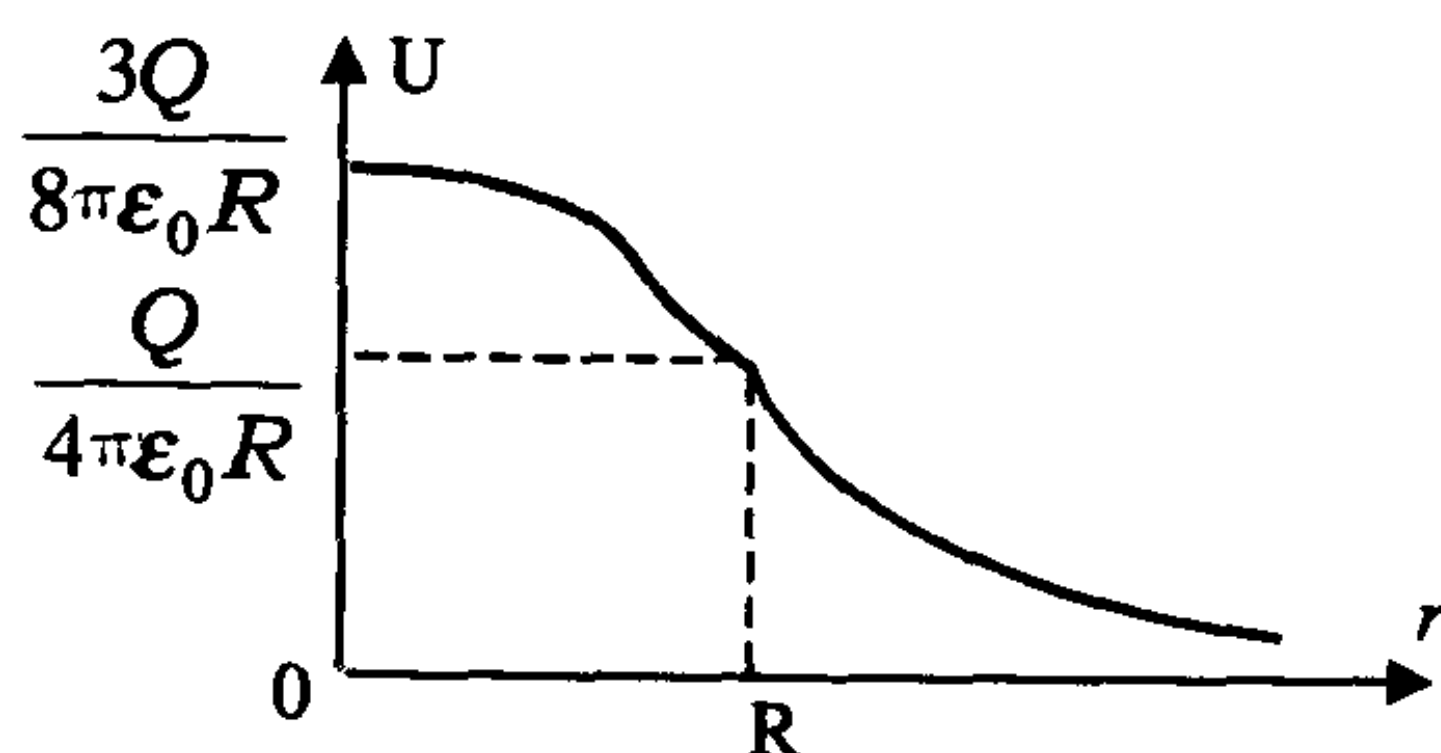


图 4-21

高斯面内的总电荷量为

$$\sum q = \int_V \rho(r') dV = \frac{2Q}{R^2} \int_0^r r' dr' = \frac{Q}{R^2} r^2$$

所以

$$E_{\text{内}} \times 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q = \frac{Q}{\epsilon_0 R^2} r^2$$

$$E_{\text{内}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (r < R)$$

命题得证。

3. 一计数管中有一直径为 D_2 的薄金属长圆筒, 在圆筒的轴线处装有一根直径为 D_1 ($D_1 > D_2$) 的细金属丝, 如图 4-22 所示。计数管工作时金属丝与圆筒的电势差为 ΔU , 求:

- ① 计数管内 ($\frac{D_1}{2} < r < \frac{D_2}{2}$) 的场强分布;
- ② 金属丝表面的场强大小 E_1 和圆筒内表面的场强大小 E_2 ;
- ③ 实际装置中 $D_1 = 1.26 \times 10^{-5} \text{ m}$, $D_2 = 2.0 \times 10^{-2} \text{ m}$, $\Delta U = 1000 \text{ V}$, 计算金属丝表面的场强大小 E_1 等于多少? 金属丝单位长度的荷电量 λ 等于多少?

[解] ① 作一半径为 r ($\frac{D_1}{2} < r < \frac{D_2}{2}$)、长为 l 的柱形高斯面 (如图 4-23 所示), 以 λ 表示金属丝上的电荷线密度, 由高斯定理可知

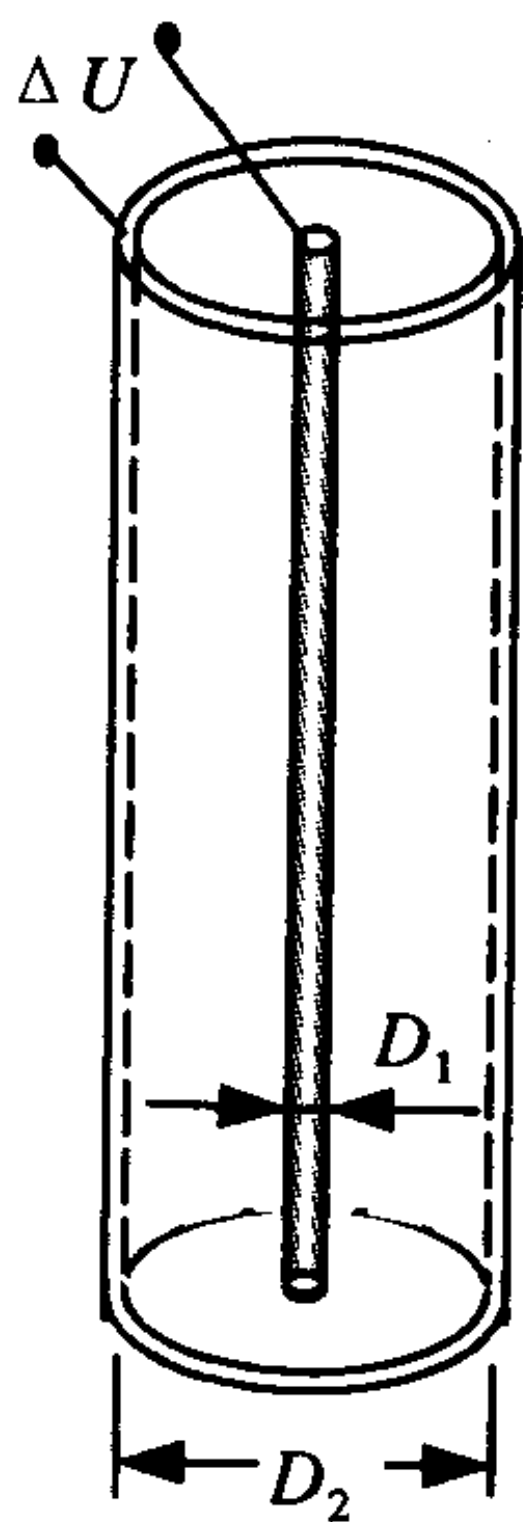


图 4-22

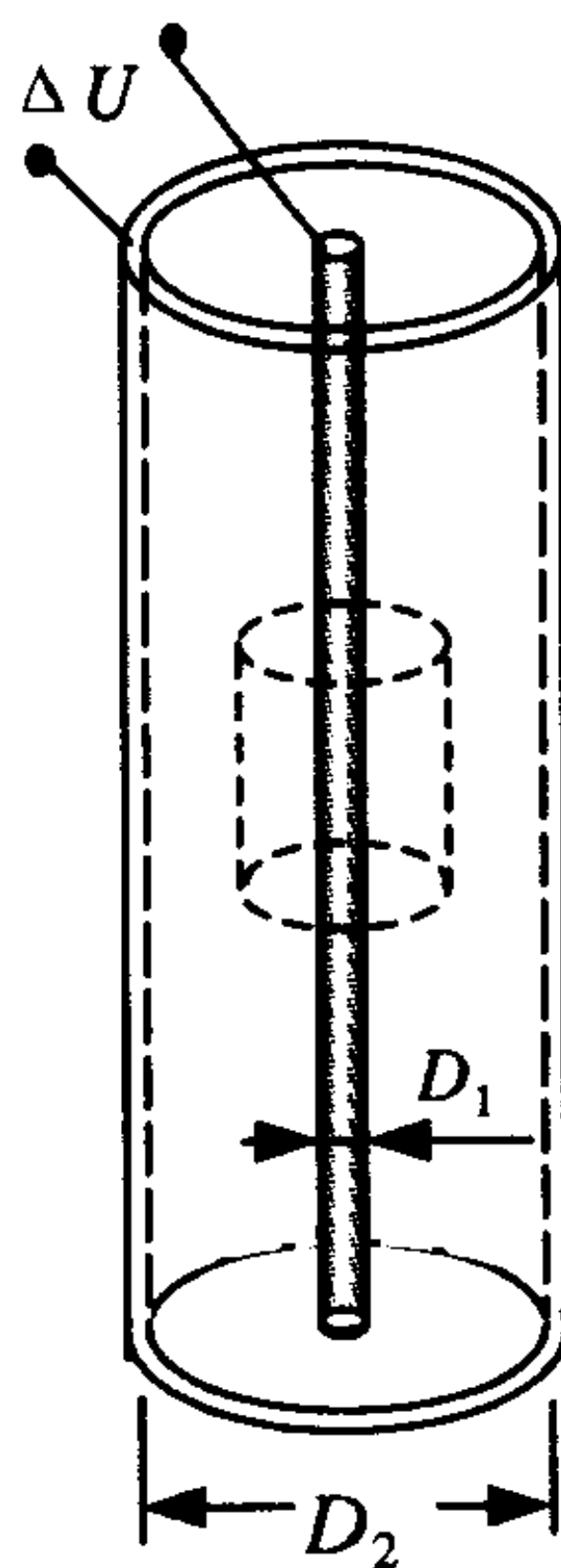


图 4-23

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\text{侧}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\text{上底}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\text{下底}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ &= E \iint_{\text{侧}} dS = E \times 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} \lambda l\end{aligned}$$

计数管内的场强分布为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \left(\frac{D_1}{2} < r < \frac{D_2}{2}\right)$$

金属丝与圆筒间的电势差为

$$\Delta U = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\frac{D_1}{2}}^{\frac{D_2}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{D_2}{D_1}$$

所以

$$\lambda = 2\pi\epsilon_0 \Delta U / \ln \frac{D_2}{D_1}$$

将 λ 代入 E 的表达式中可得

$$E = \Delta U / r \ln \frac{D_2}{D_1}$$

② 将 $r = \frac{D_1}{2}$ 代入上式可得金属丝表面的场强

$$E_1 = 2\Delta U / D_1 \ln \frac{D_2}{D_1}$$

将 $r = \frac{D_2}{2}$ 代入场强公式可得圆筒内表面场强

$$E_2 = 2\Delta U / D_2 \ln \frac{D_2}{D_1}$$

③ 将题目中的数字代入可得金属丝表面的场强

$$\begin{aligned} E_1 &= 2 \times 1 \times 10^3 / 1.26 \times 10^{-5} \times \ln \frac{2 \times 10^{-2}}{1.26 \times 10^{-5}} \\ &= 2.15 \times 10^7 \text{ V/m} \end{aligned}$$

金属丝单位长度的荷电量

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2 \times 3.14 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 1 \times 10^3}{\ln \frac{2 \times 10^{-2}}{1.26 \times 10^{-5}}} = \\ &7.54 \times 10^{-9} \text{ C/m} \end{aligned}$$

四、附加题

1. 一个半球面上均匀分布有电荷, 试用对称性和叠加原理论证下述结论成立: 在半球面的圆形底面区域上, 各点的场强方向都垂直于此圆底面。

[解] 已知一个均匀带电球面在其内部的场强处处为零。此题可在此基础上来分析。设想一个均匀带电球面是由上下两个带电半球面组合而成, 那么上半球面在球内 P 点的场强和下半球面在球内 P 点的场强的矢量迭加应为零。

如果上半球面在圆底面上 P 点处的场强矢量 E 如图所示。那么下半球面在此圆底面

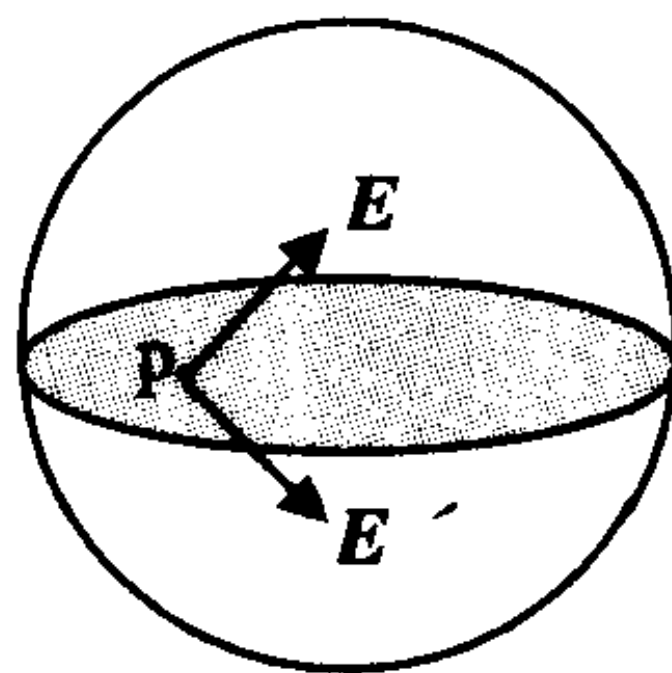


图 4-24

上P点的场强矢量 E' 亦如图 4-24 所示。显然,如果 E 的方向不与圆底面垂直,则

$$E + E' \neq 0$$

这与已知结论相矛盾。因此,带电半球面在圆底面上各点场强方向应处处垂直于圆底面。

2. 如图 4-25 所示,一半径为 R 的均匀带电球面,带电量为 q ,沿矢径方向放置有一均匀带电细线,电荷线密度为 λ ,长度为 l ,细线近端离球心距离为 a 。设球和细线上的电荷分布不受相互作用的影响,试求:

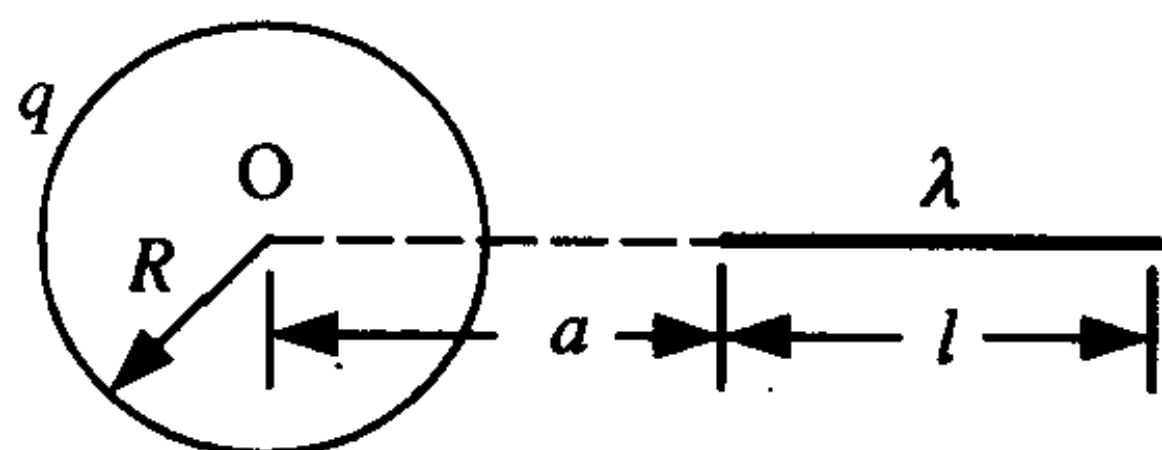


图 4-25

- ① 细线与球面电荷之间的电场力 F ;
- ② 细线在该电场中的电势能 W 。(设无穷远处为电势零点)。

[解] 如图 4-26 以 O 点为圆点沿细线方向建立坐标系,在细线上任取一线元 dx ,其上电荷量 $dq = \lambda dx$ 。

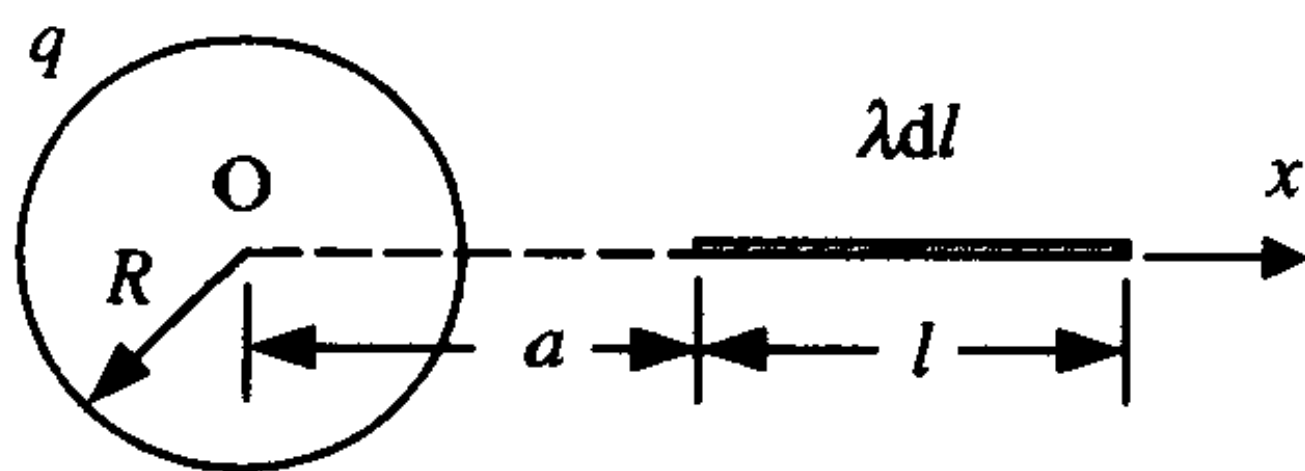


图 4-26

- ① 球面在线元 dx 处的场强为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

线元 dx 受到的电场力为

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\lambda dx}{x^2}$$

整个细线所受的电场力为

$$F = \int dF = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{a+l} \frac{dx}{x^2} = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l} \right)$$

方向沿 x 轴正方向。

② 线元在球面电荷电场中的电势能为

$$dW_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x} \lambda dx$$

整个细线在电场中具有的电势能为

$$W = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{a+l} \frac{dx}{x} = \frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{a+l}{a}$$

第5章 静电场中的导体和电介质

一、选择题

1. 在静电场中,下列说法正确的是()。

- A. 带正电荷的导体,其电势一定是正值
- B. 等势面上各点的场强一定相等
- C. 在导体表面附近处的场强,是由该表面上的电荷 σ 产生的,与空间其它地方的电荷无关
- D. 一个孤立的带电导体,表面的曲率半径愈大处,电荷密度愈小

2. 在一个不带电的导体球壳的球心处放入一点电荷 q ,当 q 由球心处移开,但仍在球壳内时,请判断()。

- A. 球壳内、外表面的感应电荷均不再均匀分布
- B. 球壳内表面感应电荷分布不均匀,外表面感应电荷分布均匀
- C. 球壳内表面感应电荷分布均匀,外表面感应电荷分布不均匀
- D. 球壳内、外表面感应电荷仍保持均匀分布

3. 如图 5-1 所示,一无限大均匀带电平面附近放置一与之平行的无限大导体平板。已知带电平面的电荷面密度为 σ ,导体板两表面 1 和 2 的感应电荷面密度为()。

A. $\sigma_1 = -\sigma, \quad \sigma_2 = +\sigma$

B. $\sigma_1 = -\frac{\sigma}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma}{2}$

C. $\sigma_1 = +\sigma, \sigma_2 = -\sigma$

D. $\sigma_1 = +\frac{\sigma}{2}, \sigma_2 = -\sigma$

4. 带电体外套一导体球壳, 则下列说法中正确的是()。

A. 壳外电场不影响壳内电场, 但壳内电场要影响壳外电场

B. 壳内电场不影响壳外电场, 但壳外电场要影响壳内电场

C. 壳内、外电场互不影响

D. 壳内、外电场仍互相影响

E. 若将外球壳接地, 则答案 C 是正确的。

5. 如图 5-2 所示, 两同心金属球壳, 它们离地球很远。如果外球壳上带正电 q , 当内球壳用细导线穿过外球壳上的绝缘小孔与地连接, 则内球壳()。

A. 不带电荷

B. 带正电荷

C. 带负电荷

D. 球壳外表面带负电荷, 内表面带等量正电荷

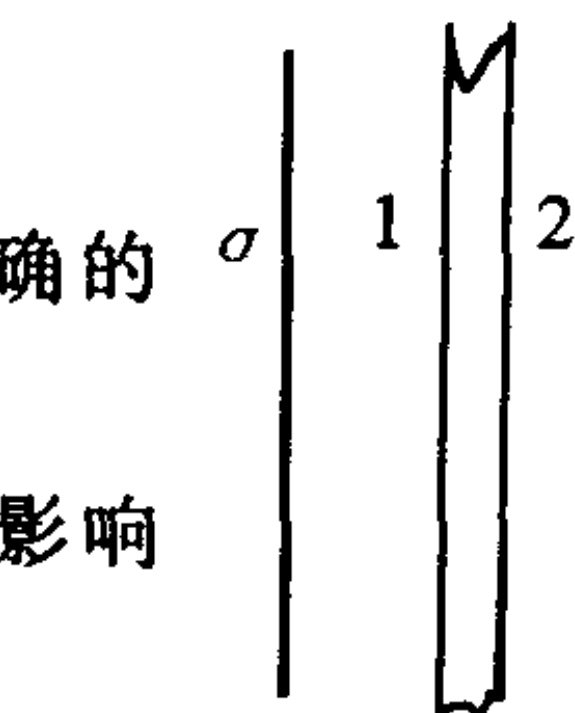


图 5-1

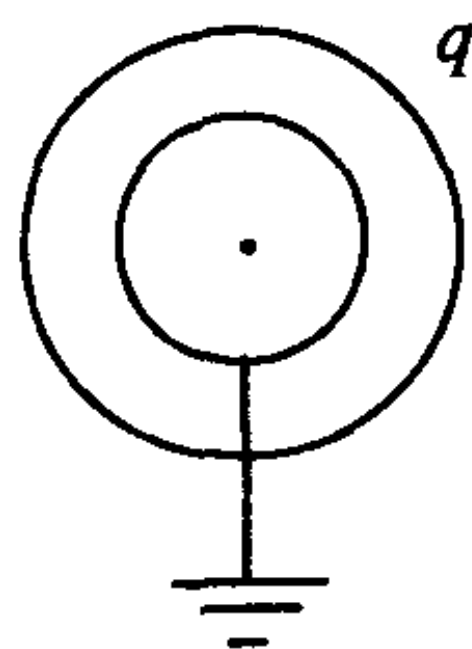


图 5-2

6. 关于高斯定理, 下列说法中正确的是()。

A. 高斯面内不包围自由电荷, 则穿过高斯面的 D 通量与 E 通量均为零

B. 高斯面上的 D 处处为零, 则面内自由电荷的代数和必为零

C. 高斯面上各点 D 仅由面内自由电荷决定

D. 穿过高斯面的 D 通量仅与面内自由电荷有关, 而穿过高斯面的 E 通量与高斯面内外的自由电荷均有关

7. 一平行板电容器与电源相连, 电源端电压 U , 电容器极板间距离为 d , 电容器中充满两块大小相同, 介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 的均匀电介质板, 如图 5-3 所示, 则左、右两侧电介质中的电位移 D 的大小分别为()。

- A. $D_1 = D_2 = \frac{\epsilon_0 U}{d}$
 B. $D_1 = \frac{\epsilon_1 U}{d}, D_2 = \frac{\epsilon_2 U}{d}$
 C. $D_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 U}{d}, D_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_2 U}{d}$
 D. $D_1 = \frac{U}{\epsilon_1 d}, D_2 = \frac{U}{\epsilon_2 d}$

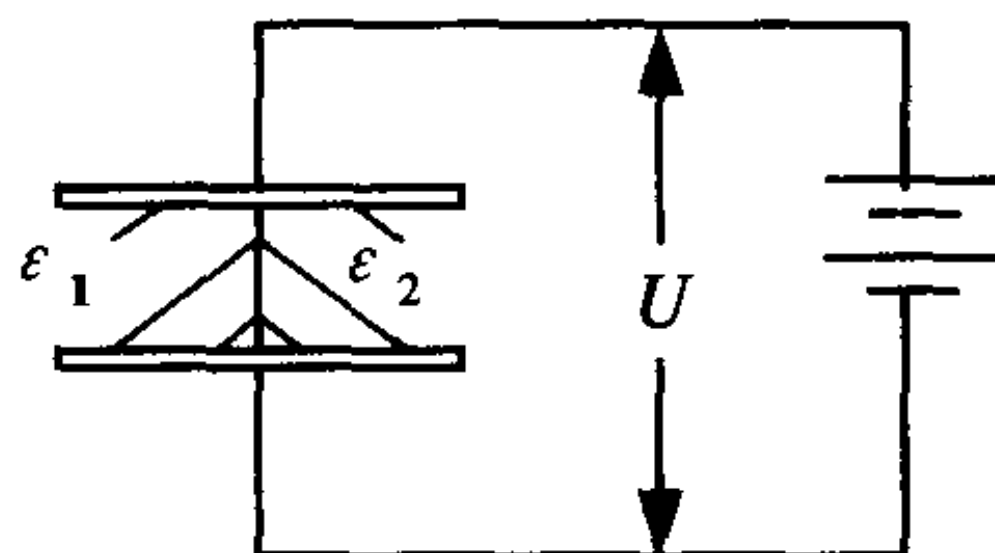


图 5-3

8. 一空气平行板电容器充电后与电源断开, 然后在两极板间充满各向同性均匀电介质, 则场强的大小 E 、电容 C 、电压 U 、电场能量 W 。四个量各自与充入介质前相比较, 增大(用 \uparrow 表示)或减小(用 \downarrow 表示)的情形为()。

- A. $E \downarrow, C \uparrow, U \uparrow, W_e \downarrow$ B. $E \uparrow, C \downarrow, U \downarrow, W_e \uparrow$
 C. $E \uparrow, C \uparrow, U \uparrow, W_e \uparrow$ D. $E \downarrow, C \uparrow, U \downarrow, W_e \downarrow$

9. 一内外半径分别为 R_1 和 R_2 的同心球形电容器, 其间充满相对介电常数为 ϵ_r 的电介质, 当内球带电量为 Q 时, 电容器中的储能为()。

- A. $W_e = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$
 B. $W_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$
 C. $W_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$
 D. $W_e = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0\epsilon_r} (R_1 - R_2)$

选择题解答

1. [解] 本题正确答案为(D)。

对于题目给出的 A, B, C, D 四种说法分别分析如下:

(1) A 说法是错误的。带正电的导体, 其电势不一定是正值, 可以是零, 也可以是负值。

例如, 一个接地的导体旁放有一带负电的带电体, 则导体上将产生正的感应电荷。由于导体此时接地, 其电势为零而带正电(如图 5-4 所示)。

又如, 一个带正电的导体球, 外套一个带负电的导体球壳, 并已知球壳上的负电荷从量值上远远大于导体球上的正电荷(如图 5-5 所示)。以无穷远点为电势零点, 由电势的计算公式可知: 导体球的电势

$$U_{\text{球}} = \int_{R_1}^{R_2} E_{\text{内}} \cdot dr + \int_{R_3}^{\infty} E_{\text{外}} \cdot dr = \Delta U + U_{\text{壳}}$$

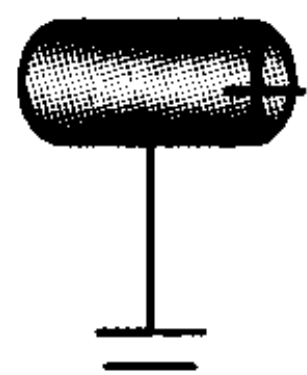


图 5-4



图 5-5

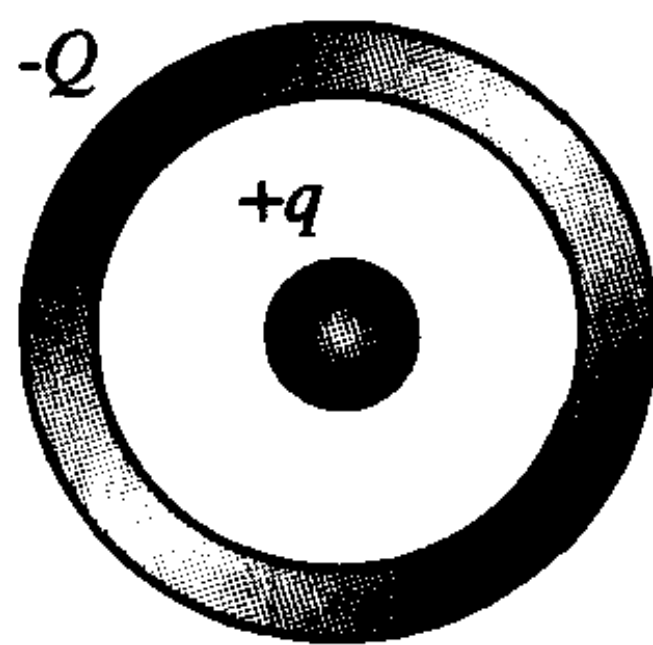


图 5-6

因为 $U_{\text{壳}} < 0$, 且 $|U_{\text{壳}}| > \Delta U$, 则 $U_{\text{球}} < 0$;

即带正电的导体球其电势却是负值。

(2) B 说法也是错误的。等势面上各点的场强并不一定相等。例如一个任意形状的孤立导体, 带电量为 Q , 达到静电平衡后, 其

表面为一等势面。但在如图5-6所示的a点与b点附近场强并不相等。由 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ 知, a点的导体表面曲率半径比b点的小, 则导体上a点处的电荷密度比b点处的大, 故 $E_a > E_b$ 。

(3) C说法是错误的。导体表面附近处的场强是由空间所有电荷在该处产生的电场迭加的结果, 不是由该表面上的电荷 σ 惟一产生的。导体表面附近的场强与该表面上的电荷面密度成正比, 即 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, 并不表明该处的场强仅仅由 σ 产生, 这只是一个数值上的正比关系。

(4) D说法是正确的。避雷针就是利用这一原理制成的。

2. [解] 本题正确答案为(B)。

如图5-7所示, 当点电荷 q 在球壳内偏心放置时, 达到新的静电平衡后, 由高斯定理可知, 在球壳内表面将感应出等量异号的电荷 $-q$, 由电荷守恒定律可知, 在球壳外表面将感应出等量同号的正电荷 q 。在球壳的内表面距离点电荷 q 近的地方, 感应电荷的密度大, 距离点电荷 q 远的地方, 感应电荷的密度小; 在球壳的外表面感应电荷仍然是均匀分布。即球壳内点电荷的不对称分布, 只会影响到球壳内表面感应电荷的不对称分布, 并不会影响到球壳外表面电荷的对称性分布。

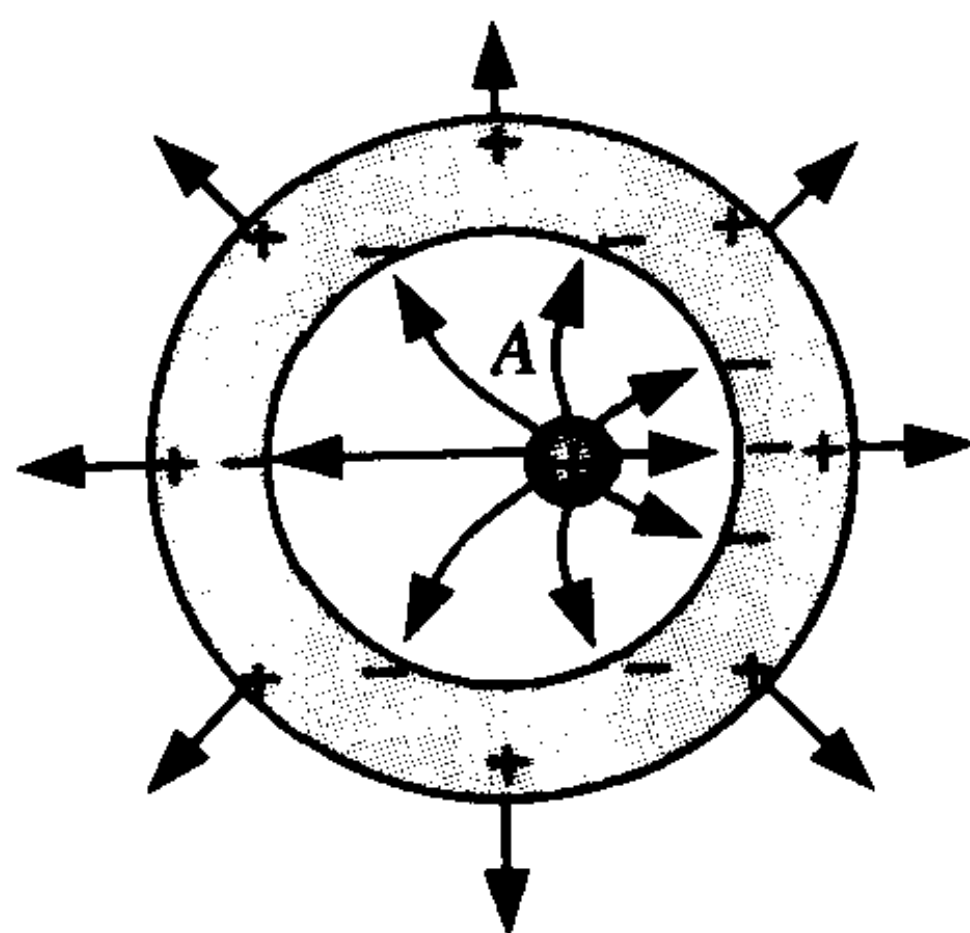


图 5-7

导致上述现象的原因是导体达到静电平衡后, 导体内任一点的电场强度 $E = 0$ 。而该场强是由点电荷的场 E_q 、球壳内表面感应电荷的场 $E_{内}$ 、球壳外表面感应电荷的场 $E_{外}$ 三部分叠加的结果。

$$\text{即} \quad E = E_q + E_{内} + E_{外} = 0$$

现已知, 一个均匀带电球壳在壳内任一点的场强恒为零, 即

$E_{\text{外}} = 0$ 。由此可知

$$E_q + E_{\text{内}} = 0 \quad (\text{在导体球壳壳体内的空间})$$

当球壳内点电荷偏心放置时,上式仍成立。球壳外表面任一点感应电荷 σ 受到的点电荷和球壳内表面感应电荷的静电作用力为

$$F = \sigma(E_q + E_{\text{内}}) = 0$$

所以,外表面的感应电荷的分布不受球壳内电荷位置的影响。

3. [解] 本题正确答案为(B)。

设导体平板两侧感应电荷面密度分别为 σ_1, σ_2 。

在导体板中任选一点 P, 由静电平衡条件知 $E_P = 0$ 。即三个无限大带电平面在该点的场强迭加为零。如图 5-8 选择参考方向, 有

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} = 0 \quad (1)$$

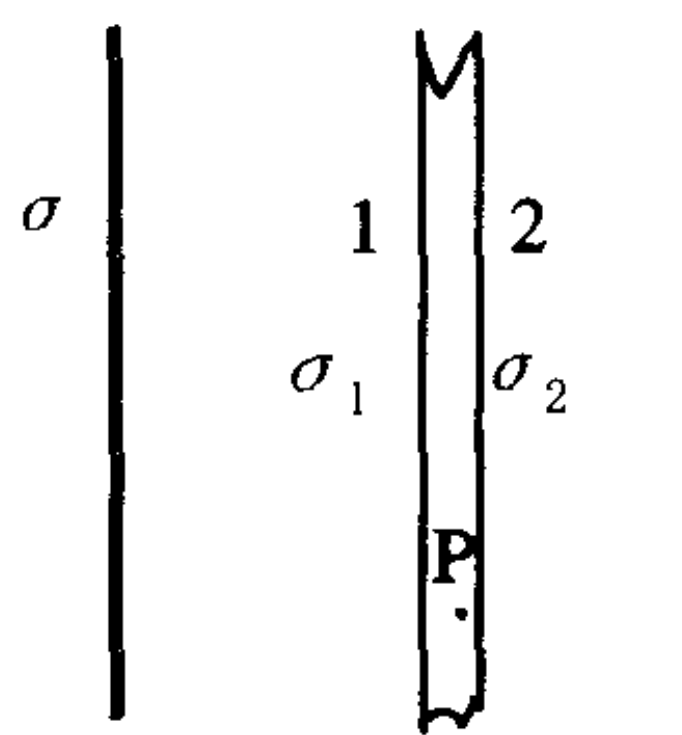


图 5-8

又由电荷守恒定律知

$$\sigma_1 \frac{S}{2} + \sigma_2 \frac{S}{2} = 0 \quad (2)$$

S 为平面面积。二式相加得

$$\sigma + 2\sigma_1 = 0$$

所以

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma}{2}, \quad \sigma_2 = +\frac{\sigma}{2}.$$

4. [解] 本题的正确答案为(A, E)。

由空腔导体的静电屏蔽可知, 导体壳可以屏蔽掉外部电场对内部空间的影响, 但不会屏蔽掉内部电场对外部的影响。但是一个接地的空腔导体则可以同时屏蔽掉内外空间电场的相互影响。

5. [解] 本题的正确答案为(C)。

内球接地, 球壳内部的空间与外界沟通, 内球与无穷远点同为电势零点, 球壳上的电荷必须重新分布, 才能达到新的静电平衡状态。

若设内球半径为 R_1 , 外球壳半径为 R_2 , 球壳的电势应为

$$U = \int_{R_2}^{\infty} E_{\text{外}} \cdot dl = \int_{R_2}^{R_1} E_{\text{内}} \cdot dl > 0$$

由此可知必须有 $E_{\text{内}} \neq 0$ 。又由于球壳本身带正电, 所以 $E_{\text{内}}$ 的方向为由外球壳指向内球壳。由高斯定理可知, 内球壳表面必须感应负电荷。

6. [解] 本题正确答案为(B)。

由高斯定理的两种表示形式

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q, \quad \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q$$

可知: 电位移通量 Φ_D 只和曲面 S 内包围的自由电荷的代数和有关, 电场强度通量 Φ_E 和曲面 S 内包围的所有电荷(包括自由电荷和束缚电荷)的代数和有关。

7. [解] 本题的正确答案为(B)。

本题容易使人得出如下的结论: 电容器两边的电介质不同, 则两边的电场强度就不同, 故 $E_1 \neq E_2$ 。此结论是否正确呢? 分析如下: 忽略边缘效应, 两极板之间的电势差为

$$U = E_1 d = E_2 d$$

显然 $E_1 = E_2$

因为对均匀各向同性的电介质

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

所以可知

$$D_1 \neq D_2$$

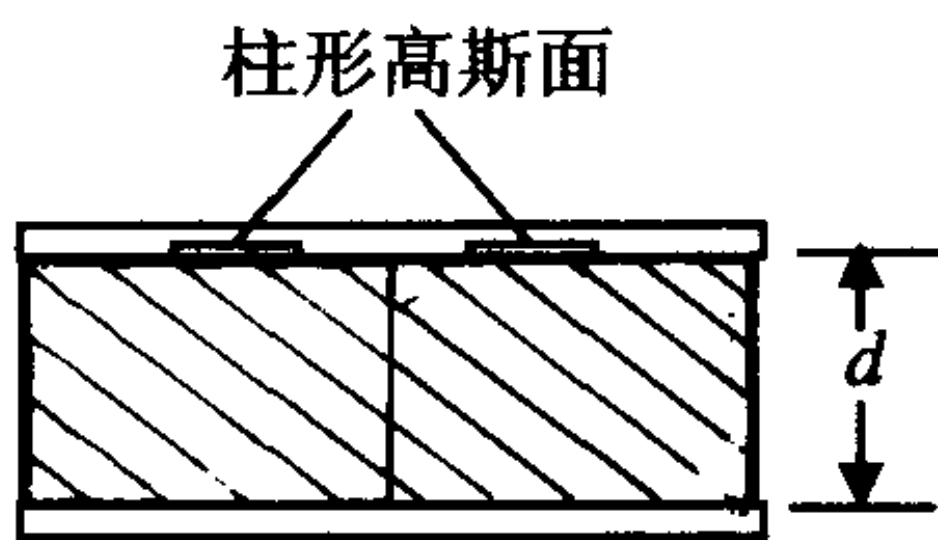


图 5-9

在电容器的两边各作一个柱形的高斯面, 如图 5-9 所示, 高斯面的一个底面处于导体板内部, 一个底面处于电介质中。由高斯定理可解得

$$D_1 = \sigma_1, \quad D_2 = \sigma_2$$

所以极板两面的电荷密度不相等。由此可得

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}}, \quad E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}}$$

所以
$$U = \frac{D_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}} d = \frac{D_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} d$$

可得
$$D_1 = \frac{\epsilon_1 U}{d}, \quad D_2 = \frac{\epsilon_2 U}{d}$$

8. [解] 本题正确答案为(D)。

设极板面积为 S , 极板间距为 d , 带电量为 Q , 电介质的相对介电常数为 ϵ_r 。

$$\begin{array}{ll} \text{未充介质: } E_0 = \frac{Q}{\epsilon_0 S} & \text{充介质: } E = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} = \frac{E_0}{\epsilon_r} \\ U_0 = E_0 d & U = E d = \frac{U_0}{\epsilon_r} \\ C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d} & C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} = \epsilon_r C_0 \\ W_{e0} = \frac{1}{2} Q U_0 & W_e = \frac{1}{2} Q \frac{U_0}{\epsilon_r} = \frac{W_{e0}}{\epsilon_r} \end{array}$$

9. [解] 本题正确答案为(B)。

由高斯定理可知, 球形电容器中间的场强分布为

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} D E = \frac{Q^2}{32\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^4} \quad (R_1 < r < R_2)$$

在 r 处取一厚度为 dr 的同心薄球壳作为体积元

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

该体积元中的电场能量为

$$dW_e = w_e dV = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} dr$$

电容器中的储能为

$$W_e = \int dW_e = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

二、填空题

1. 一实心金属导体, 不论原先是否带电, 当它处在其它带电体所产生的电场中而达到静电平衡时, 其上的电荷必定分布在 _____, 导体表面的电场强度 E 必定沿 _____ 方向, 导体内任一点的电势梯度 $\text{grad}U =$ _____。

2. 如图 5-10 所示, 把一块原来不带电的金属板 B , 移近一块已带有正电荷 Q 的金属板 A , 二者平行放置, 设两板面积都是 S , 二板间距离是 d , 且 $\sqrt{S} \gg d$, 忽略边缘效应, 当 B 板不接地时, 两板间电势差 $\Delta U =$ _____; 当 B 板接地时 $\Delta U =$ _____。

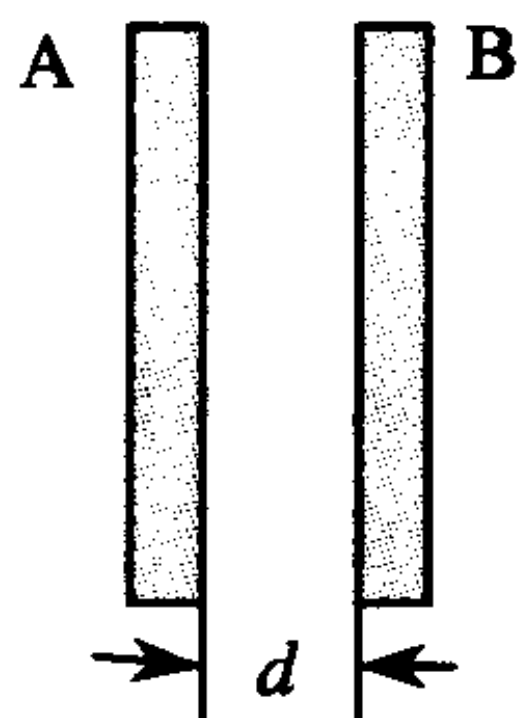


图 5-10

3. 如图 5-11 所示, 半径为 R_0 的导体 A , 带电 Q , 球外套一内外半径为 R_1, R_2 的同心球壳 B , 设 r_1, r_2, r_3, r_4 分别代表图中 I, II, III, IV 区域内任一点至球心 O 的距离, 则

① 若球壳为导体时, 各点电位移 D 的大小分别为

$$D_1 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad D_2 = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$D_3 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad D_4 = \underline{\hspace{2cm}};$$

② 若球壳为介质壳, 相对介电常数为 ϵ_r , 各点电场强度 E 的大小分别为

$$E_1 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad E_2 = \underline{\hspace{2cm}};$$

$E_3 =$ _____; $E_4 =$ _____;
 此时以无穷远点为电势零点, 则 A 球的电势为 $U =$ _____
 _____。

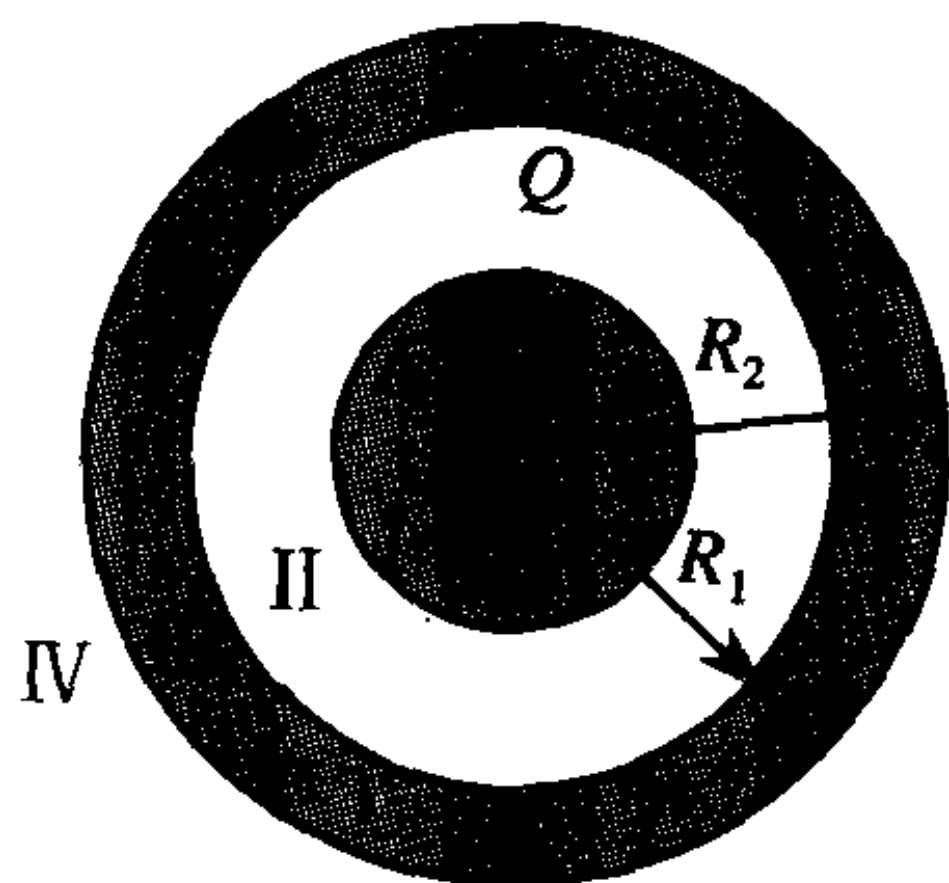


图 5-11

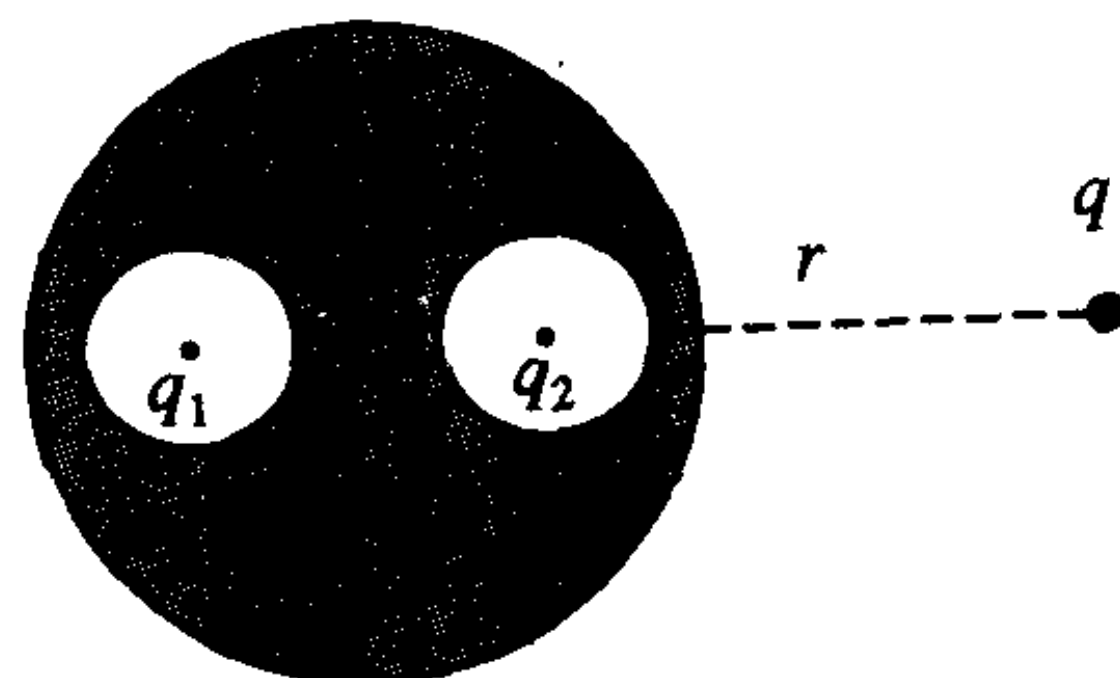


图 5-12

4. 如图 5-12 所示, 在金属球内有两个空腔, 此金属球原来不带电, 在两空腔内各放一点电荷 q_1 和 q_2 , 则金属球外表面上的电荷分布为 _____。在金属球外远处放一点电荷 $q (r \gg R)$, 则 q_1 受力 $F_1 =$ _____; q_2 受力 $F_2 =$ _____, q 受力 $F =$ _____。

5. 如图 5-13 所示, 在边长为 a 的正方形平面的中垂线上、距中心 O 点 $\frac{a}{2}$ 处, 有一电量为 $+q$ 的点电荷。如取平面的正法线方向 n 如图所示, 则通过该平面的电场强度通量 $\Phi_E =$ _____, 电位称通量 $\Phi_D =$ _____。

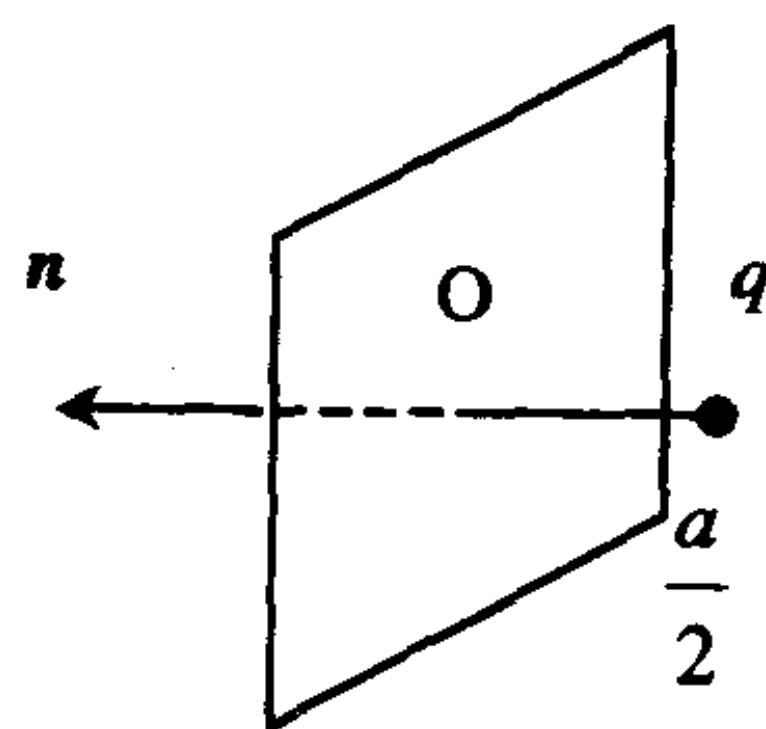


图 5-13

6. 如图 5-14 所示, 平行板电容器中充有各向同性的均匀电介质板, 图中画出两组带有箭头的线, 分别用来表示电场线和电位移线, 则其中图(a)为 _____ 线, 图(b)为 _____ 线。

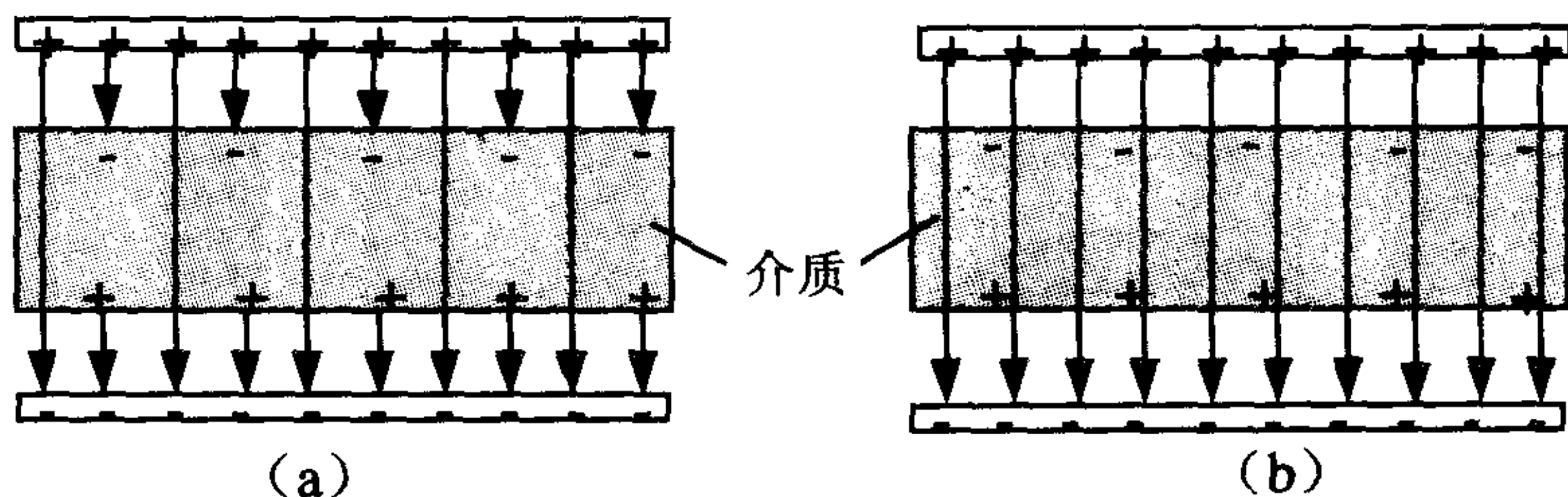


图 5-14

7. 一半径为 R 的薄金属球壳, 内部充满相对介电常量为 ϵ_r 的均匀电介质, 则其电容 $C =$ _____. 若金属球带电量 Q , 则电场能量为 _____。

8. 电介质在电容器中的作用是 _____ 和 _____。

9. 如图 5-15, 一平行板电容器, 极板面积为 S , 两极板间距为 a , 极板上电荷面密度为 σ 。若在极板间插入一厚度为 b 的电介质平行板, 介质板的相对介电常数为 ϵ_r , 则两极板间的电势差 $U_{AB} =$ _____, 插入介质板后电容器储能 $W_e =$ _____。

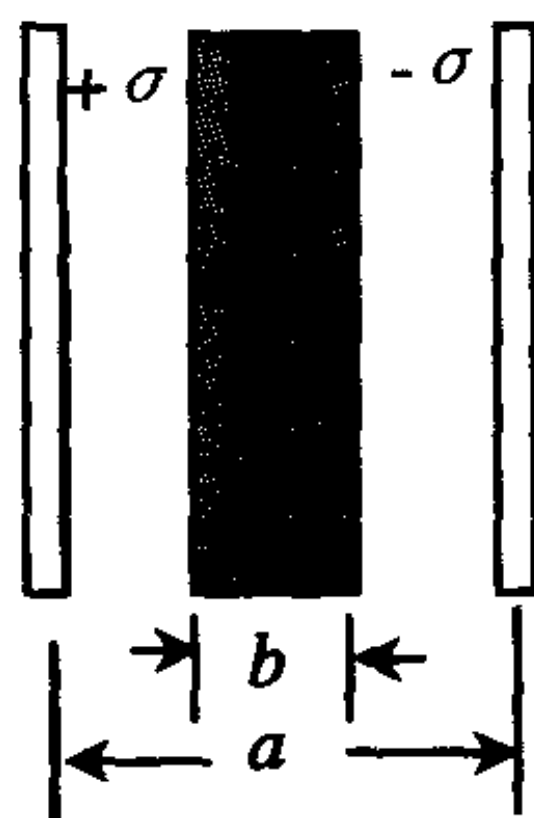


图 5-15

填空题解答

1. [解] 导体达到静电平衡时, 电荷只能分布在导体的表面, 导体表面附近的电场强度 E 的方向沿导体表面法线方向, 导体内任一点的电势梯度 $\text{grad}U = 0$ 。

2. [解] 达到静电平衡时, 两极板四个表面上均匀分布着感应电荷, 电荷量分别为 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , 如图 5-16 所示。

由电荷守恒定律知:

$$Q_1 + Q_2 = Q \quad (1)$$

$$Q_3 + Q_4 = 0 \quad (2)$$

由电场叠加原理和静电平衡条件知, 在导体板内 P_1 点和 P_2 点的场强叠加为零。取向为电场的正方向, 则有

P_1 点:

$$\frac{Q_1}{2\epsilon_0 S} - \frac{Q_2}{2\epsilon_0 S} - \frac{Q_3}{2\epsilon_0 S} - \frac{Q_4}{2\epsilon_0 S} = 0 \quad (3)$$

P_2 点:

$$\frac{Q_1}{2\epsilon_0 S} + \frac{Q_2}{2\epsilon_0 S} + \frac{Q_3}{2\epsilon_0 S} - \frac{Q_4}{2\epsilon_0 S} = 0 \quad (4)$$

四式联立可解得

$$Q_1 = Q_4 = \frac{Q}{2}, \quad Q_2 = -Q_3 = \frac{Q}{2}$$

两极板间场强为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}$$

所以, 两极板间的电势差

$$\Delta U = \frac{Qd}{2\epsilon_0 S}$$

如果 B 板接地, B 板外侧表面上的电荷将与地中和。A 板上的正电荷与 B 板上的负感应电荷将相互吸引到两极板的内侧, 直到静电平衡。此时有

$$Q_1 = Q_4 = 0, \quad Q_2 = -Q_3 = Q$$

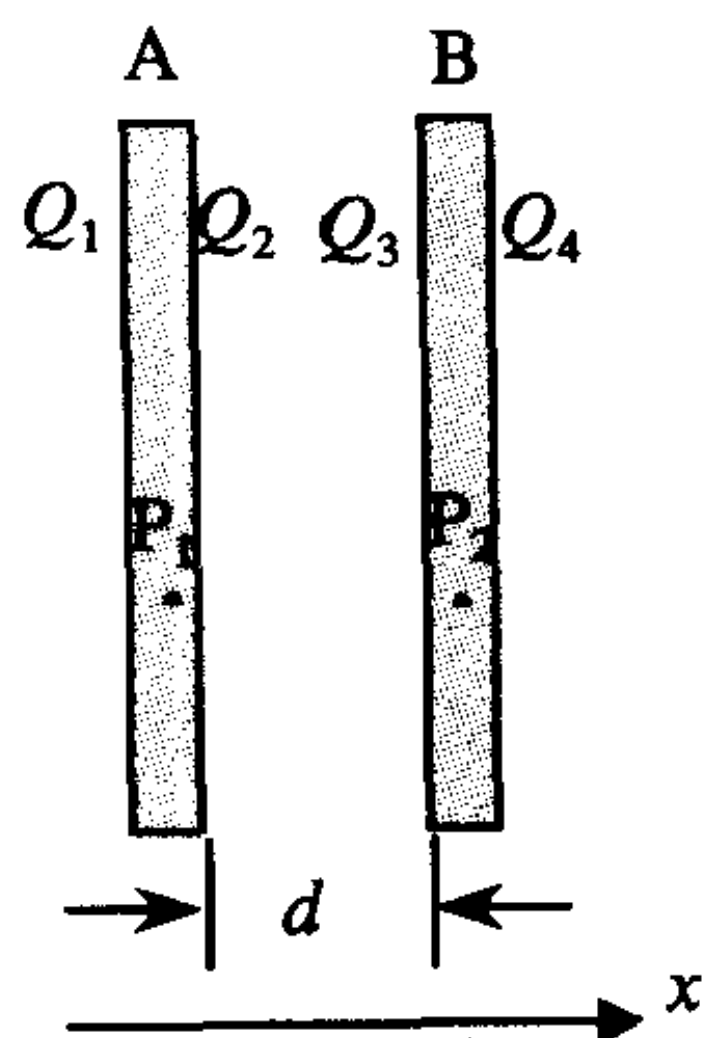


图 5-16

故两极板之间的场强为 $E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$, 两极板间电势差

$$\Delta U = \frac{Q}{\epsilon_0 S} d$$

3. [解] 在 I, II, III, IV 四个区域分别作四个半径分别为 r_1, r_2, r_3, r_4 的同心球形高斯面。由高斯定理可知

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D 4\pi r^2 = \sum q_0$$

$$r_1 < R \text{ 区域: } D_1 = 0, \quad E_1 = 0$$

$$R < r_2 < R_1 \text{ 区域: } D_2 = \frac{Q}{4\pi r_2^2}, \quad E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$$

$$R_1 < r_3 < R_2 \text{ 区域: } D_3 = 0, \quad E_3 = 0$$

$$r > R_2 \text{ 区域: } D_4 = \frac{Q}{4\pi r_4^2}, \quad E_4 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_4^2}$$

若将导体球壳换成介质球壳, 则由高斯定理知:

$$D_1 = 0, \quad D_2 = D_3 = D_4 = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

故 E_1, E_2, E_4 形式不变, 而 $E_3 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$ 。

A 球电势为

$$\begin{aligned} U_A &= \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \\ &= \int_r^{R_1} E_1 dr + \int_{R_1}^{R_2} E_2 dr + \int_{R_2}^{R_3} E_3 dr + \int_{R_3}^\infty E_4 dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{\epsilon_r R_1} - \frac{1}{\epsilon_r R_2} + \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

4. [解] 在导体内包围两个空腔分别作两个高斯面, 由静电平衡条件知

$$\oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

说明两空腔的内表面均匀分布有一 q_1 和 $-q_2$ 的感应电荷。由电荷守恒定律可知, 金属球外表面上将均匀分布有电荷 $Q = q_1 + q_2$ 。

— q_1 在左面空腔内球心处的场强为零, — q_2 在右面空腔内球心处的场强亦为零。由选择题 2 的题解分析可知: q_1 与感应电荷 — q_1 在左空腔以外区域的场强迭加为零, q_2 与感应电荷 — q_2 在右空腔以外区域的场强迭加亦为零。又由空腔导体的静电屏蔽作用可知, q_1 与 q_2 所在的空腔内部不会受到外电场的影响, 故

$$q_1 \text{ 受力: } F_1 = 0, \quad q_2 \text{ 受力: } F_2 = 0$$

点电荷 q 处在感应电荷 $q_1 + q_2$ 的电场中, 受力为

$$F = qE = \frac{q(q_1 + q_2)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

5. [解] 连接图 5-13 所示平面作一边长为 a 的正立方体, 将点电荷包围于立方体的中心 (如图 5-17 所示)。由于点电荷的场强分布是球对称的, 点电荷到六个平面的距离相等, 故穿过六个平面的电通量均相等, 各占总电通量的 $1/6$ 。

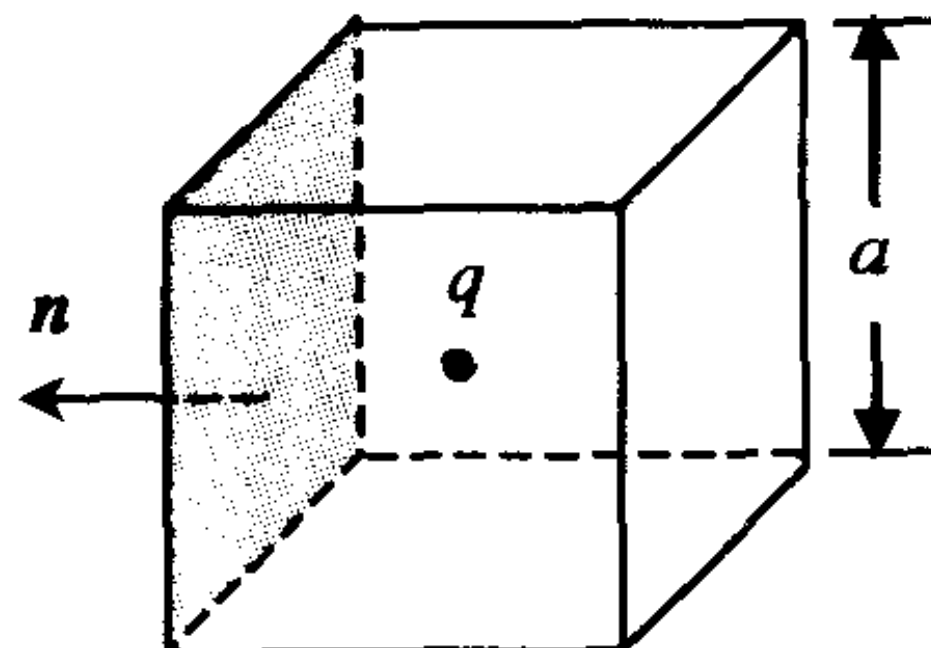


图 5-17

已知

$$\oint_S D \cdot dS = q$$

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

可知通过该平面的电位移通量为 $\Phi_D = \frac{q}{6}$, 电场强度通量为 $\Phi_E = \frac{q}{6\epsilon_0}$ 。

6. [解] 在图 5-14 中, 图(a)为 E 线, 图(b)为 D 线。

7. [解] 此问题可以看成是一个另一极板在无穷远处的球形电容器, 故仍可用公式

$$C = \frac{Q}{\Delta U}$$

表示其电容值, 其中因球外电场与球内电介质无关, 故球的电势为

$$\Delta U = \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

所以

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

由电容器储能公式可知

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

8. [解] 电介质在电容器中的作用一是增强抗压能力,二是增大电容值。

9. [解] 忽略边缘效应,插入介质板后,由高斯定理可知,极板间任一点的电位移均为 $D = \sigma$ 。由 $E = \frac{D}{\epsilon_0\epsilon_r}$ 可知:

$$E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = E_3, \quad E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r}$$

两极板间电势差

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_1(a-b) + E_2b = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(a-b) + \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r}b$$

电容器的储能可用两种方法求得。

方法一:利用电容器储能公式计算。

$$W_e = \frac{1}{2}QU_{AB} = \frac{1}{2}\sigma SU_{AB} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}S(a-b + \frac{b}{\epsilon_r})$$

方法二:利用电场能量密度来计算, $w_e = \frac{1}{2}DE$ 。

$$w_{e1} = w_{e3} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0}, \quad w_{e2} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0\epsilon_r}$$

由于平行板电容器中的电场能量密度是分区域均匀分布的,由公式 $W_e = \int w_e dV$ 可知

$$W_e = w_{e1}S(a-b) + w_{e2}Sb = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}S(a-b + \frac{b}{\epsilon_r})$$

三、问答题

1. 试从机理、电荷分布、电场分布等方面来比较导体的静电平衡和电介质的极化有何异同。

[答]① 机理:

静电感应是导体中的自由电子在电场力的作用下的宏观移动,使导体上的电荷整体达到一种新的分布状态;而电介质的极化则是分子在电矩的作用下的取向极化或位移极化,介质中的分子并未出现宏观的迁移。

② 电荷分布:

导体达到静电平衡后电荷只分布在导体的表面,体内电荷密度为零;对于均匀各向同性电介质,介质极化后,极化电荷亦只分布在介质的表面,介质内部的体电荷密度亦为零。

③ 电场分布

导体达到静电平衡后其内部电场强度处处为零,导体表面附近的电场强度方向处处垂直于导体表面,大小与表面处的电荷密度成正比;电介质极化后极化电荷在介质内部产生反向电场,使介质中的场强减弱,但不为零。

四、计算与证明题

1. A, B, C 是三块平行金属板,面积均为 S ; C, B 板相距为 d ; A, C 板相距为 $d/2$; A, B 两板都接地(如图 5-18 所示), C 板带正电荷 Q , 不计边缘效应。

① 求 A 板和 B 板上的感应电荷 Q_A, Q_B 及 C 板的电势 U_C 。

② 若在 C, B 两板之间充以相对介电常数为 ϵ_r 的均匀电介质,再求 A 板和 B 板上的感应电荷 Q'_A, Q'_B 及 C 板的电势 U'_C 。

[解] ① 设 C 板左、右两侧分别带电荷 Q_1, Q_2

$$Q_A = -Q_1, \quad Q_B = -Q_2$$

$$\text{则} \quad Q_1 + Q_2 = Q \quad (1)$$

由于 C, A 间和 C, B 间均可视为匀强电场

$$E_{CA} = \frac{Q_1}{\epsilon_0 S}, \quad E_{CB} = \frac{Q_2}{\epsilon_0 S} \quad (2)$$

A, B 板接地 $U_{CA} = U_{CB}$

$$\text{即有} \quad E_{CA} \frac{d}{2} = E_{CB} d \quad (3)$$

由式(2)、式(3)得 $Q_1 = 2Q_2$ 代入式(1), 得

$$Q_1 = \frac{2}{3}Q, \quad Q_2 = \frac{1}{3}Q$$

$$\text{则} \quad Q_A = -Q_1 = -\frac{2}{3}Q$$

$$Q_B = -Q_A = -\frac{1}{3}Q$$

$$U_C = U_{CB} = E_{CB}d = \frac{Q_2 d}{\epsilon_0 S} = \frac{Qd}{3\epsilon_0 S}$$

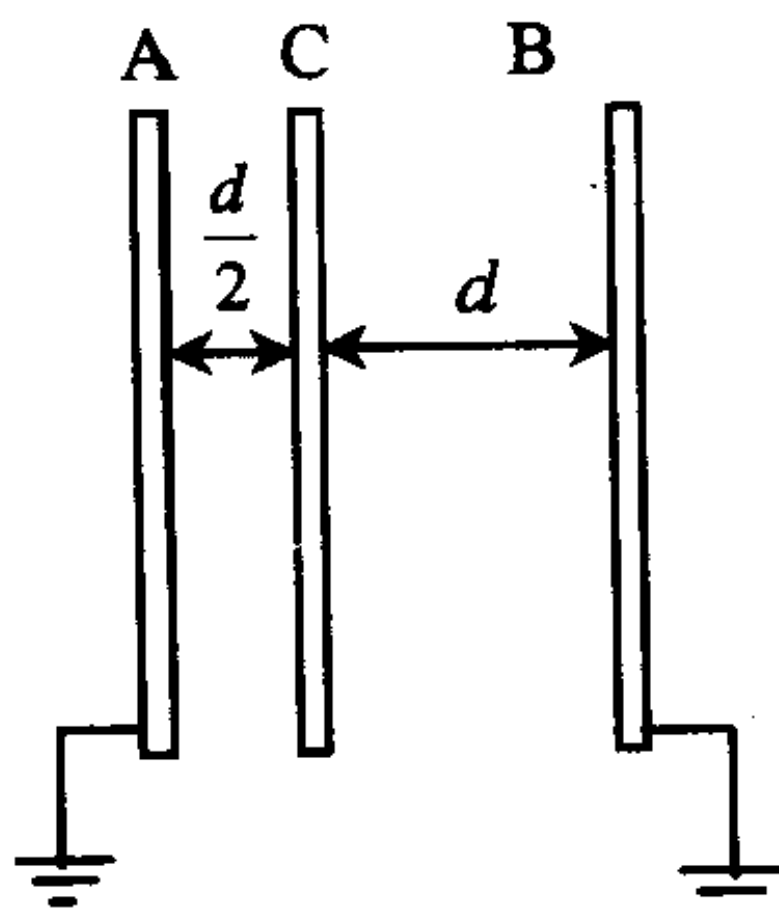


图 5-18

② 在 C, B 板间充以相对介电常数为 ϵ_r 的电介质, C 板上电荷重新分布。设左、右两侧分别带电荷 Q'_1, Q'_2 。A, B 板上感应电荷分别为 Q'_A, Q'_B 。则 $Q'_A = -Q'_1, Q'_B = -Q'_2$, 相应于上一问中的一组方程式为

$$Q'_1 + Q'_2 = Q \quad (1')$$

$$E_{CA} = \frac{Q'_1}{\epsilon_0 S}, \quad E_{CB} = \frac{Q'_2}{\epsilon_0 \epsilon_r S} \quad (2')$$

$$E_{CA} \frac{d}{2} = E_{CB} d \quad (3')$$

解式(1')、(2')、(3') 得

$$Q'_1 = \frac{2}{2 + \epsilon_r}Q, \quad Q'_2 = \frac{\epsilon_r}{2 + \epsilon_r}Q$$

于是

$$Q'_A = -Q'_1 = -\frac{2}{2 + \epsilon_r}Q, \quad Q'_B = -Q'_2 = -\frac{\epsilon_r}{2 + \epsilon_r}Q$$

$$U'_C = E'_{CA} \frac{d}{2} = \frac{Q'_1}{\epsilon_0 S} \frac{d}{2} = \frac{Qd}{\epsilon_0(2 + \epsilon_r)S}$$

2. 来顿瓶是早期的一种储电容器,它是一内外均贴有金属薄膜的圆柱形玻璃瓶,如图 5-19 所示,设玻璃瓶内外半径分别为 R_1 和 R_2 ,且 $R_2 - R_1 \ll R_1, R_2$, 内外所贴金属薄膜长为 L 。已知玻璃的相对介电常数为 ϵ_r ,其击穿场强为 E_K ,忽略边缘效应,试计算:

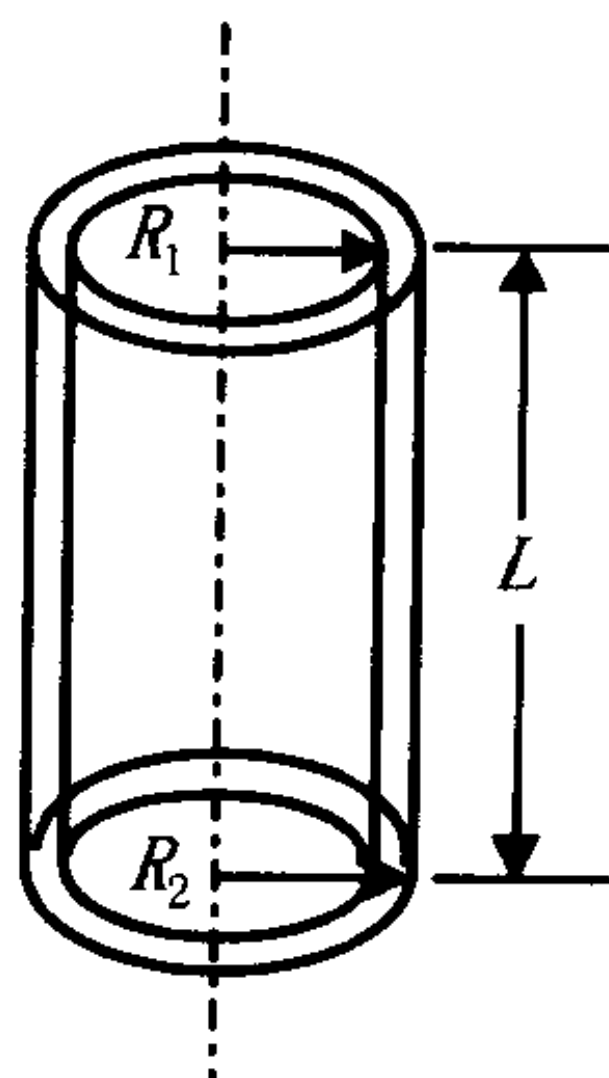


图 5-19

- ① 来顿瓶的电容值;
- ② 它最多能储存多少电荷?最大储能是多少?

[解] 来顿瓶就是一个柱形电容器。

① 设内外金属薄膜分别带电量 $+Q$ 和 $-Q$ 。则玻璃层中的场强为

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r Lr} \quad (R_1 < r < R_2)$$

内外膜间的电势差为

$$\Delta U = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

故来顿瓶的电容值

$$C = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

② 由来顿瓶间场强分布知,靠近内膜处的场强为最大,令该处场强等于击穿场强,即

$$E(R_1) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L R_1} = E_K$$

则

$$Q_{\max} = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r L R_1 E_K$$

此时来顿瓶储能为

$$W_{\max} = \frac{1}{2} Q_{\max}^2 / C = \frac{Q_{\max}^2 \ln \frac{R_2}{R_1}}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r L} = \pi\epsilon_0\epsilon_r L R_1^2 E_k^2 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

3. 利用狭义相对论质能关系可以估算出电子半径的上限。具体做法是把电子想像为一个相对介电常数为 $\epsilon_r = 1$ 的球体, 电荷 $-e$ 在球体内均匀分布, 假设电子的静电能(即电场能量)等于它的静能 $m_e C^2$, 其中 m_e 为电子的静止质量, C 为真空中的光速, 则电子半径的上限为 $R = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 m_e C^2}$, 试证明之。

[证] 由高斯定律可以求出球体内、外的电场强度大小

$$E 4\pi r^2 = \int \rho dV = \rho \frac{3}{4} \pi r^3, \quad \rho = \frac{e}{\frac{4}{3} \pi R^3}$$

则
$$E_1 = \frac{er}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (r < R)$$

$$E_2 = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R)$$

球体内外的电场能量密度分别是

$$w_1 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{er}{R^3} \right)^2$$

$$w_2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2} \right)^2$$

则电子的静电能为

$$\begin{aligned} W_e &= \int_0^R w_1 dV + \int_R^\infty w_2 dV = \\ &= \int_0^R \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{er}{R^3} \right)^2 \times 4\pi r^2 dr + \\ &= \int_R^\infty \epsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2} \right)^2 \times 4\pi r^2 dr = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

电子半径的上限由

$$W_e = m_e C^2 = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

可得

$$R = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 m_e C^2}$$

证毕。

五、附加题

1. 如图 5-20 所示, 半径为 a 的金属球, 球心与点电荷 q 相距为 b ,

- ① 求金属球的电势 U ;
- ② 若将金属球接地(设球离地面很远), 求金属球上的感应电量 q' 。

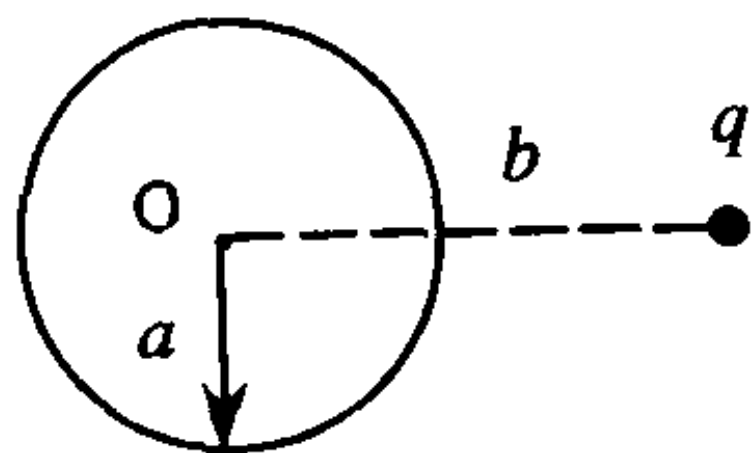


图 5-20

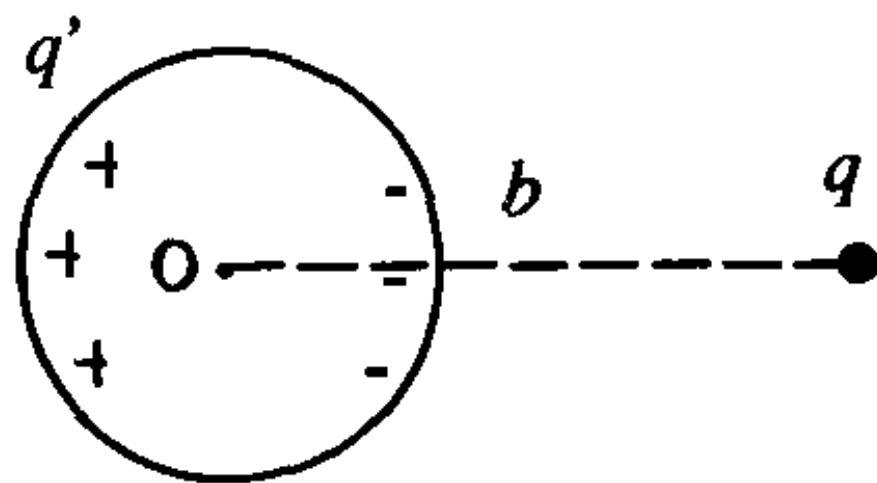


图 5-21

[解] ① 如图 5-21 所示, 金属球在点电荷 q 的电场中, 感应带等量异号电荷 $+Q, -Q$ 。

金属球在静电平衡状态下为一等势体, 求出其中任一点电势即代表金属球的电势。为简单起见, 考虑一特殊点——球心 O 点, 以下求出 O 点电势:

O 点电场由点电荷 q 的电场和感应电荷 $+q', -q'$ 的电场迭加而成。感应电荷 $+q', -q'$ 在金属球的表面上, 不论其分布如何, 每一电荷元至 O 点距离均相等(半径 a), 且电荷为等量异号, 迭加的结果, 感应电荷在 O 点电场的电势为零, 即

$$\int_{+q'} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 a} + \int_{-q} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 a} = 0$$

故只考虑点电荷 q 在 O 点的电势

$$U_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}$$

② 如图 5-22 所示, 金属球接地, 电势为零, 则金属球上存在与 q 异号的感应电荷 q' , 净电荷不再为零。仍考虑 O 点电势

$$U_0 = \int_{q'} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} = 0$$

所以
$$\int_{q'} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 a} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}$$

即
$$q' = -\frac{aq}{b}$$

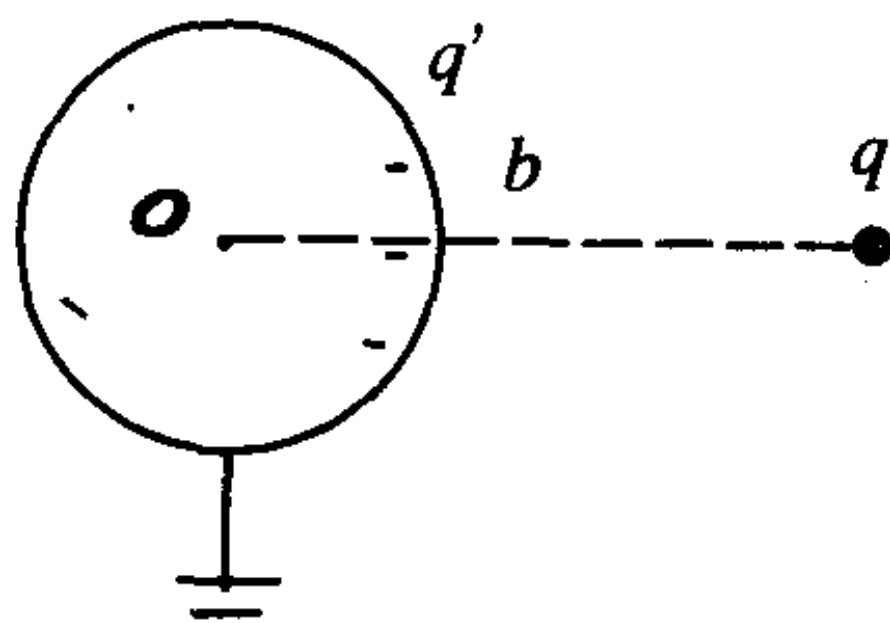


图 5-22

本题设金属球离地面很远, 接地相当于零点选在无限远处, 球上电荷分布不受地球电场的影响。

2. 一种利用电容器测量油箱中油量的装置简图如图 5-23 所示。该装置的附接电子线路能测出等效相对介电常数 $\epsilon_{r,e}$ (即电容相当而充满极板间的电介质的相对介电常数)。设电容器两板的高度均为 a , 试导出等效相对介电常数和油面高度 h 的关系, 以 ϵ_r 表示油的相对介电常量。就汽油 ($\epsilon_r = 1.95$) 和甲醇 ($\epsilon_r = 33$) 相比, 哪种燃料更适宜用此种油量表?

[解] 两极板之间的总电容可看成是一个充满介质的电容器和一个真空电容器的并联。设两极板的宽度均为 b , 则真空(空气)部分的电容值为

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{\epsilon_0 (a - h)b}{d}$$

充满油料部分的电容值为

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r h b}{d}$$

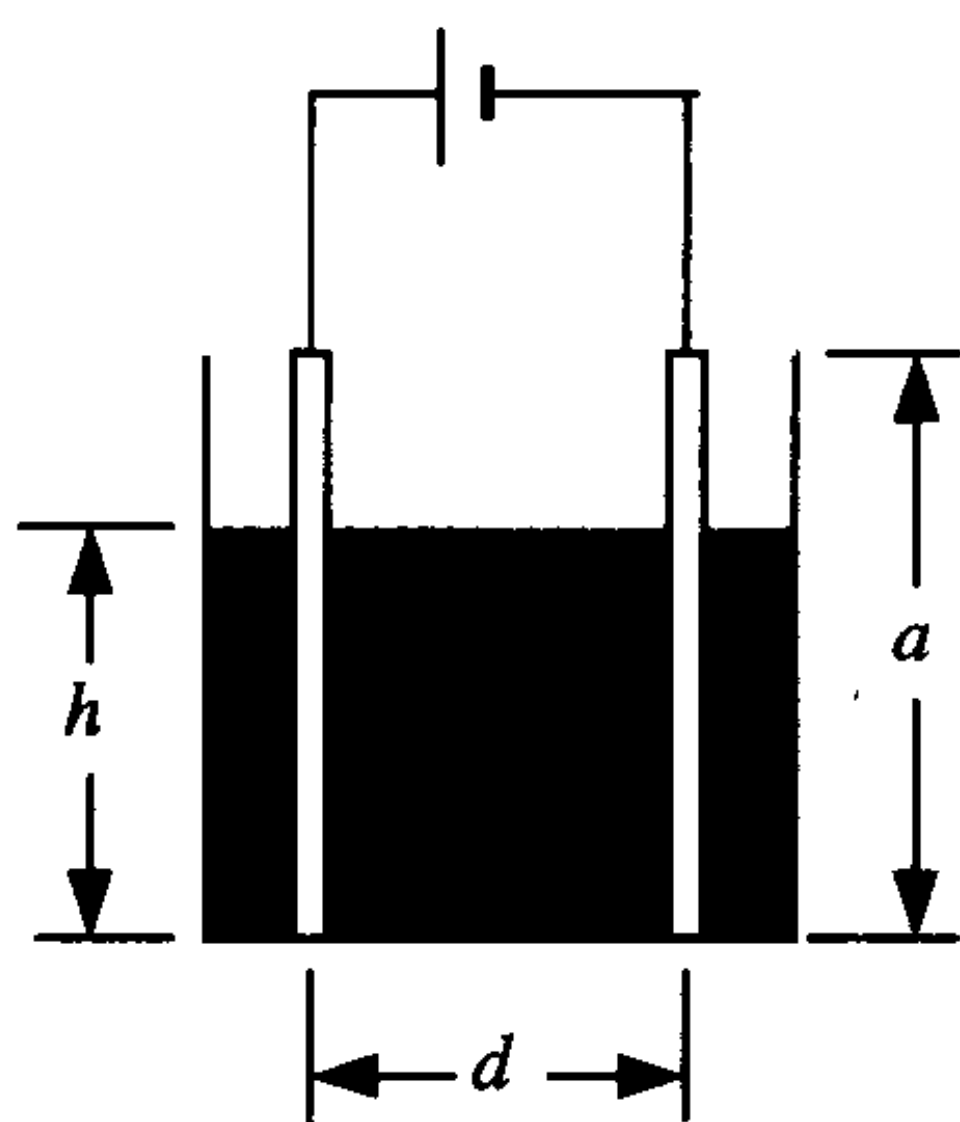


图 5-23

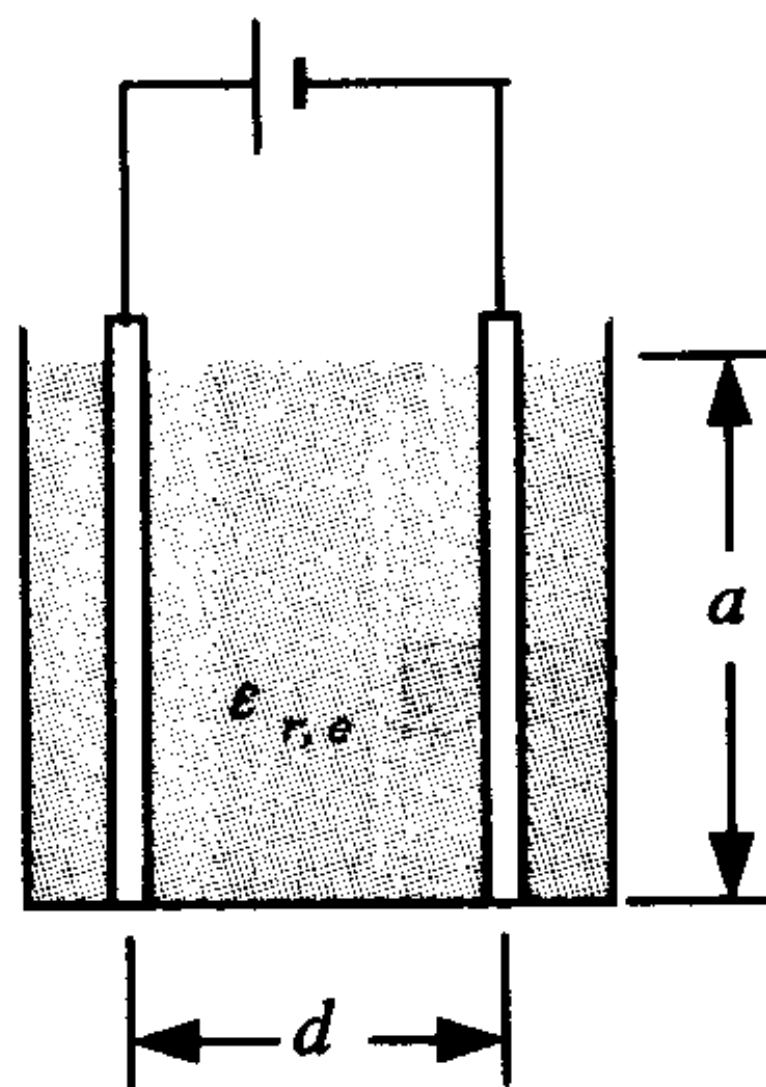


图 5-24

总电容值为

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 b}{d} [h(\epsilon_r - 1) + a]$$

此电容值可等效于一个同尺寸的、充满相对介电常数的 $\epsilon_{r,e}$ 的电容器的电容值,如图 5-24 所示。因此有

$$C = \frac{\epsilon_0 b}{d} [h(\epsilon_r - 1) + a] = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r,e} ab}{d}$$

等式两边比较可得:

$$\epsilon_{r,e} = 1 + (\epsilon_r - 1) \frac{h}{a}$$

显然,当油料液面高度变化相同时,相对介电常数 ϵ_r 越大的油料, $\epsilon_{r,e}$ 的变化越敏感。

甲醇(工业酒精)的 $\epsilon_r = 33$, 大于汽油的 $\epsilon_r = 1.95$, 故前者更适宜用此种油量表来计量油量的多少。

第 6 章 恒定电流的磁场

一、选择题

1. 一根无限长细导线载有电流 I , 折成图 6-1 所示的形状, 圆弧部分的半径为 R , 则圆心处磁感应强度 B 的大小为()。

A. $\frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{3\mu_0 I}{8R}$

B. $\frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \frac{3\mu_0 I}{8\pi R}$

C. $\frac{\mu_0 I}{4\pi R} - \frac{3\mu_0 I}{8R}$

D. $\frac{\mu_0 I}{4R} + \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$

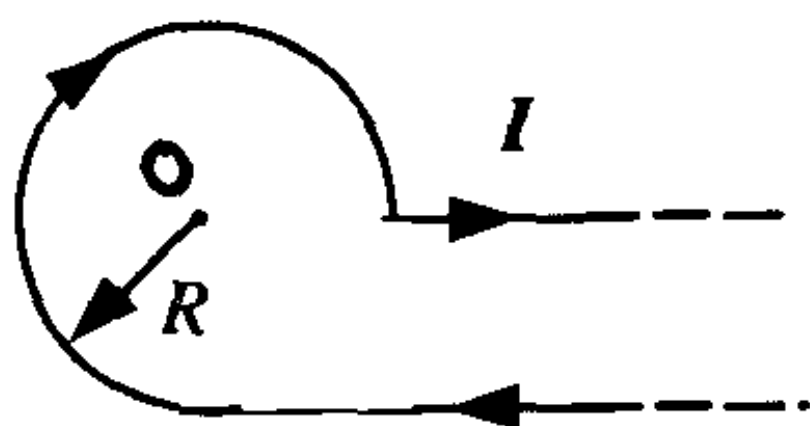


图 6-1

2. 如图 6-2 所示, 圆形回路 L 和圆电流 I 同心共面, 则磁场强度沿 L 的环流为()。

A. $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 因为 L 上 \mathbf{H} 处处为零

B. $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 因为 L 上 \mathbf{H} 处处与 $d\mathbf{l}$

垂直

C. $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$, 因为 L 包围电流 I

D. $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = -I$, 因为 L 包围电流 I 且绕

向与 I 相反

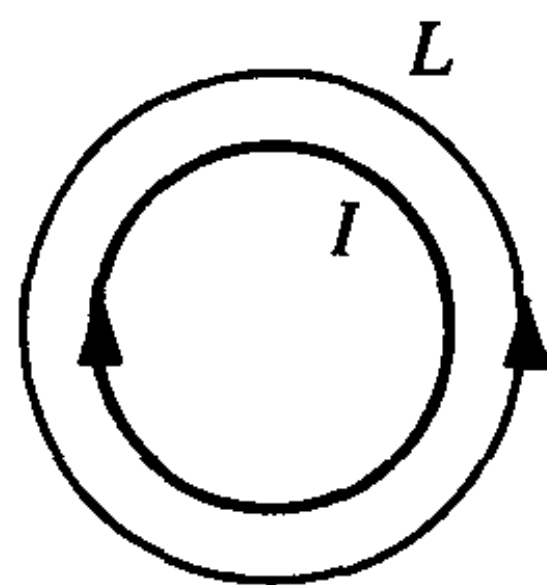


图 6-2

3. 对于安培环路定理的理解, 正确的是: (所讨论的空间处在稳恒磁场中()。

A. 若 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 则在回路 L 上必定是 \mathbf{H} 处处为零

B. 若 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 则回路 L 必定不包围电流

C. 若 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 则回路 L 所包围传导电流的代数和为零

D. 回路 L 上各点的 H 仅与回路 L 包围的电流有关

4. 一无限长薄圆筒形导体上均匀分布着电流, 圆筒半径为 R , 厚度可忽略不计, 如图 6-3 所示。在下面的四个图中, r 轴表示沿垂直于薄圆筒轴线的径向, 坐标原点与圆筒轴线重合, 则这四个图中哪一条曲线正确地表示出了载流薄圆筒在空间的磁场分布()。

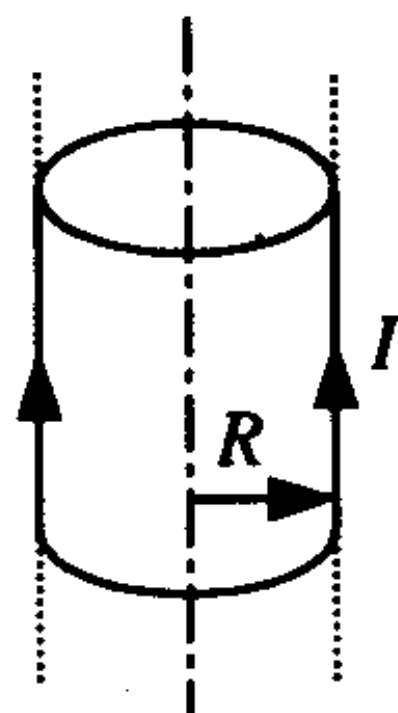
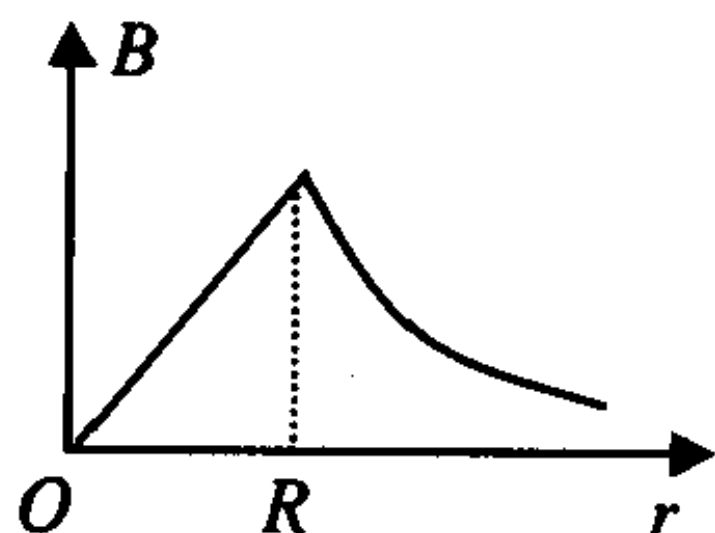
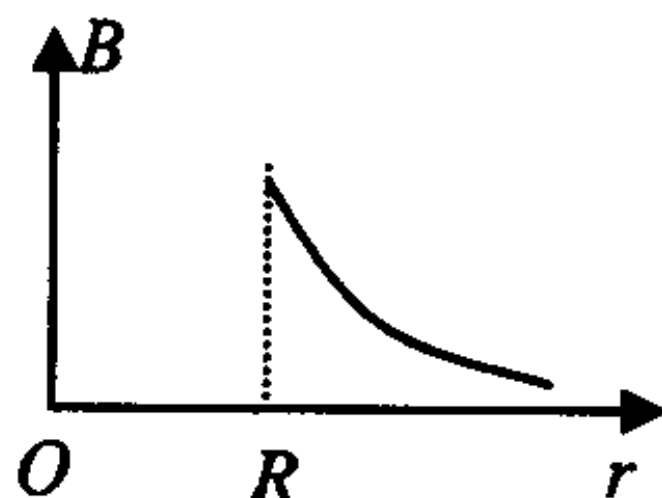


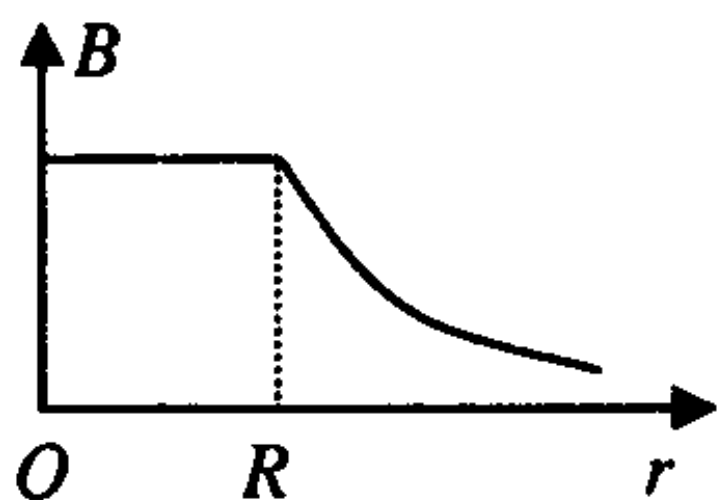
图 6-3



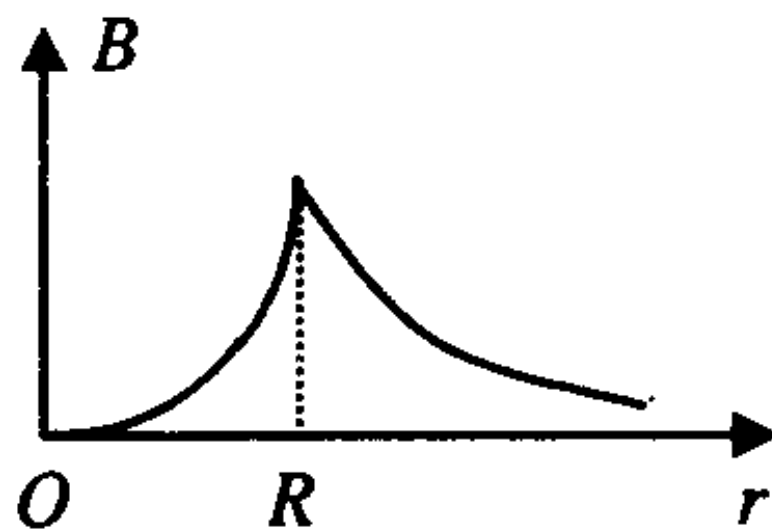
A.



B.



C.



D.

5. 如图 6-4 所示, 将一均匀分布着电流的无限大载流平面放入均匀磁场中, 电流方向与该磁场垂直。现已知载流平面两侧的磁感应强度分别为 B_1 和 B_2 , 则该载流平面上的电流密度 j 为()

A. $\frac{B_2 - B_1}{2\mu_0}$

B. $\frac{B_2 - B_1}{\mu_0}$

C. $\frac{B_1 + B_2}{2\mu_0}$ D. $\frac{B_1 + B_2}{\mu_0}$

6. 一根半径为 R 的无限长直铜导线, 载有电流 I , 电流均匀分布在导线的横截面上。在导线内部通过中心轴作一横切面 S (如图 6-5 所示), 则通过横切面 S 上每单位长度的磁通量 Φ_m 为()。

A. $\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$ B. $\frac{\mu_0 I}{4\pi}$
C. $\frac{\mu_0 I}{2\pi}$ D. $\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}$

7. 一线圈载有电流 I , 处在均匀磁场 B 中, 线圈形状及磁场方向如图 6-6 所示, 线圈受到磁力矩的大小和转动情况为(转动方向以从 O_1 看向 O_1' 或从 O_2 看向 O_2' 为准)()。

A. $M_m = \frac{5}{2}\pi R^2 IB$, 绕 $O_1 O_1'$ 轴逆时针转动

B. $M_m = \frac{5}{2}\pi R^2 IB$, 绕 $O_1 O_1'$ 轴顺时针转动

C. $M_m = \frac{3}{2}\pi R^2 IB$, 绕 $O_2 O_2'$ 轴顺时针转动

D. $M_m = \frac{3}{2}\pi R^2 IB$, 绕 $O_2 O_2'$ 轴逆时针转动

8. 如图 6-7 所示, 通有电流 I 的金属薄片, 置于垂直于薄片的均匀磁场 B 中, 则金属片上 a, b 两端点的电势相比为()。

A. $U_a > U_b$ B. $U_a = U_b$
C. $U_a < U_b$ D. 无法确定。

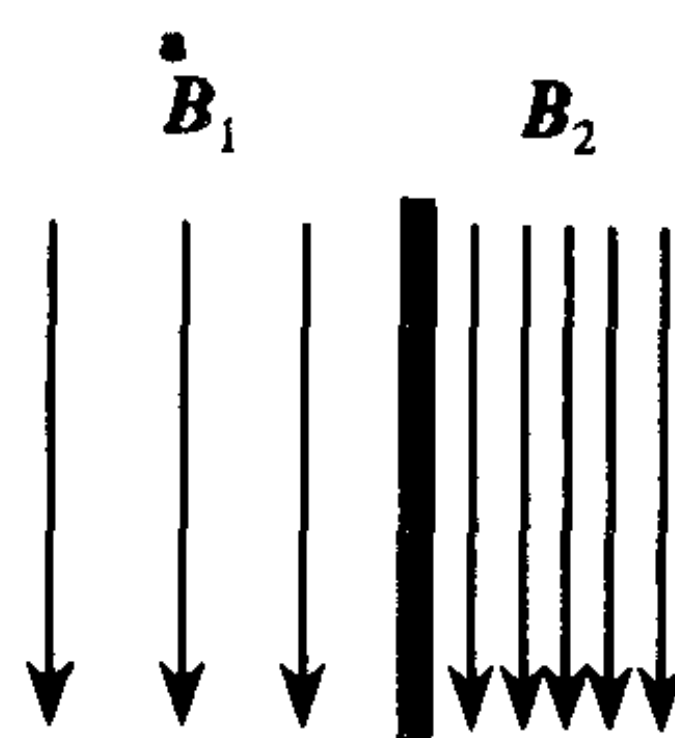


图 6-4

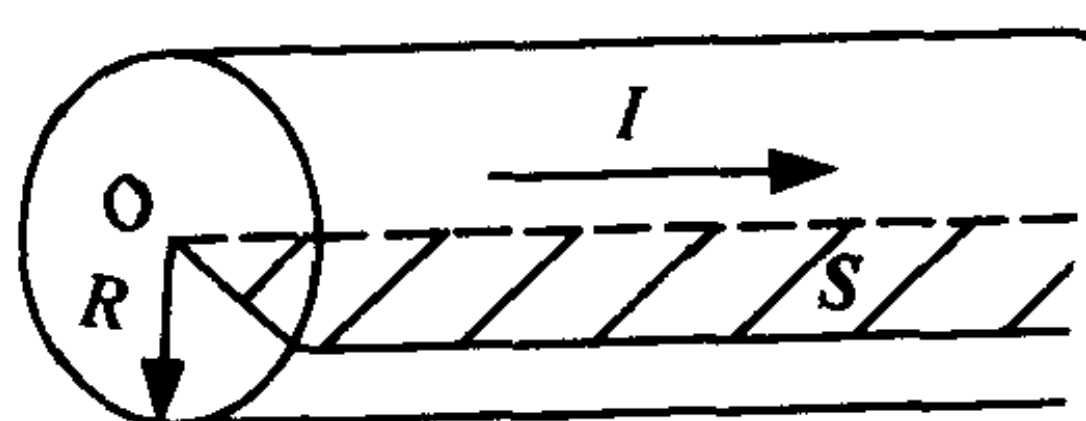


图 6-5

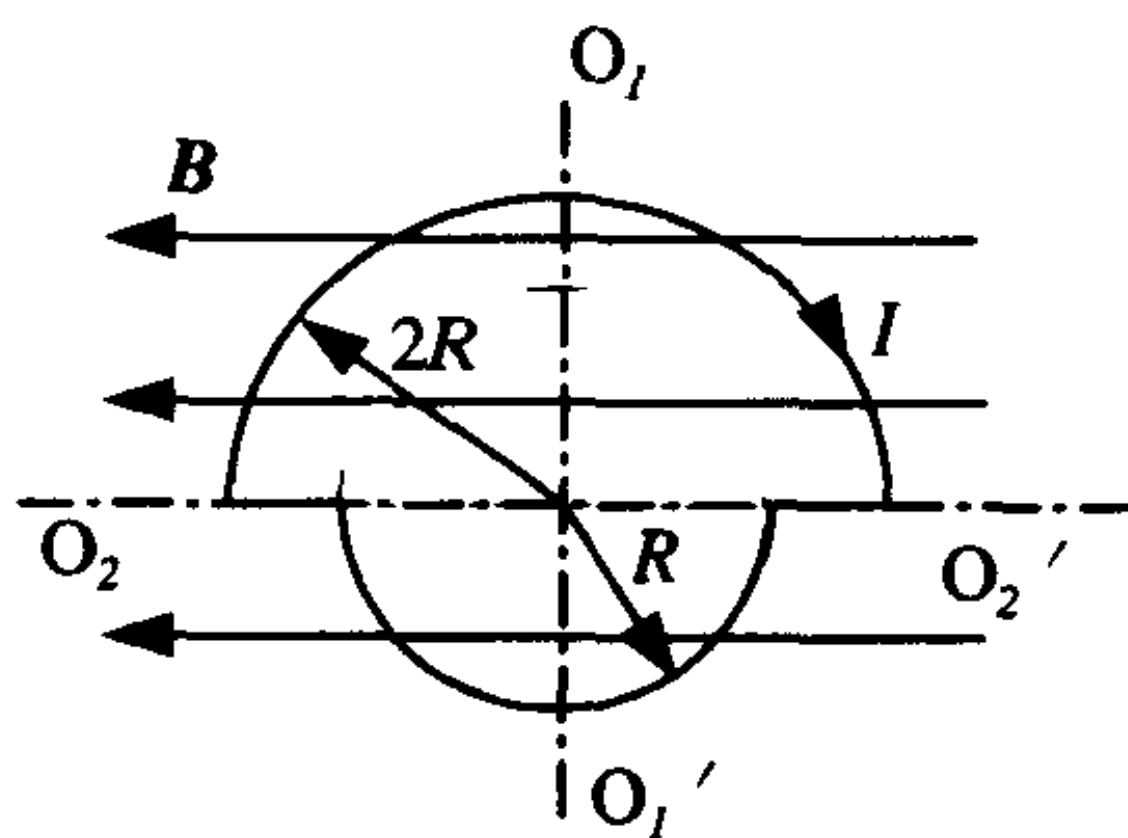


图 6-6

9. 如图 6-8 所示, 均匀磁场的磁感应强度为 B , 方向沿 y 轴正向, 欲要使电量为 q 的正离子沿 x 轴正向作匀速直线运动, 则必须加一个均匀电场 E , 其大小和方向为()。

- A. $E = \frac{B}{v}$, E 沿 z 轴正向
- B. $E = \frac{B}{v}$, E 沿 y 轴正向
- C. $E = Bv$, E 沿 z 轴正向
- D. $E = Bv$, E 沿 z 轴负向

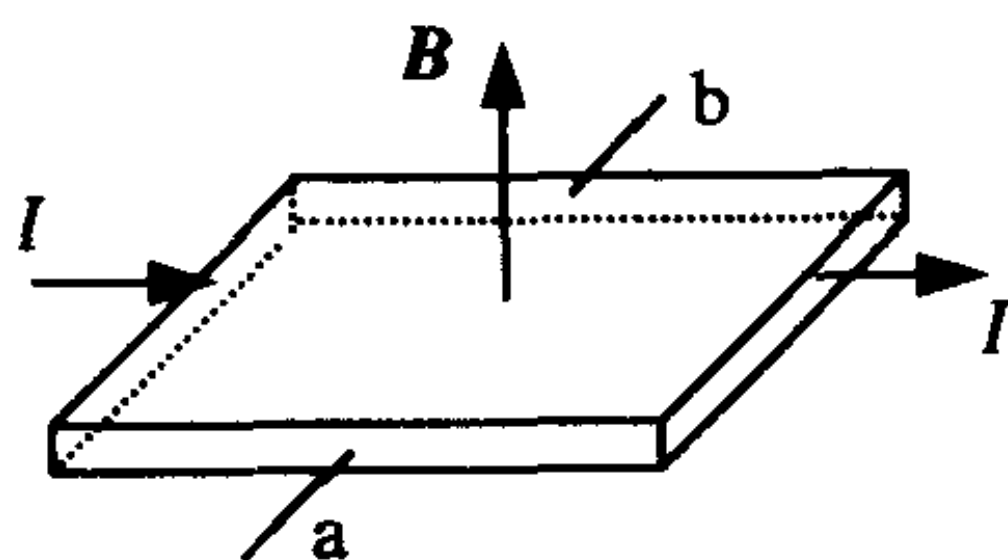


图 6-7

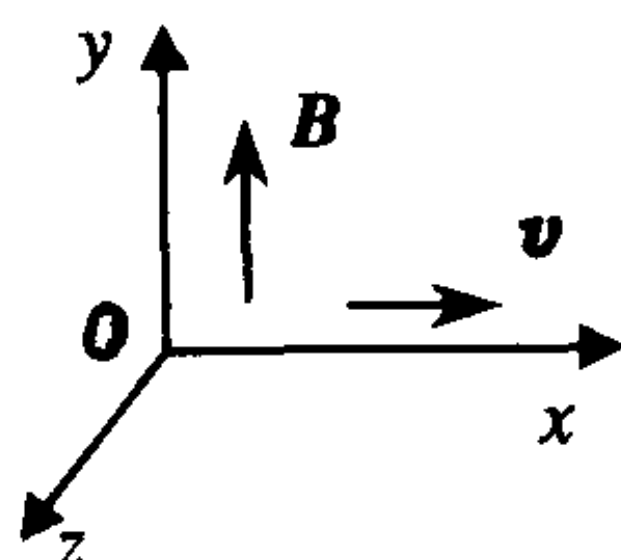


图 6-8

选择题解答

1. [解] 本题的正确答案为(A)。

一根有限长载流直导线(如图 6-9) 在空间的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

一个半径为 R 的载流圆弧(弧度角为 α) 在圆心处产生的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \alpha$$

O 点的磁场可以看成是由三段载流导线的磁场迭加而得。

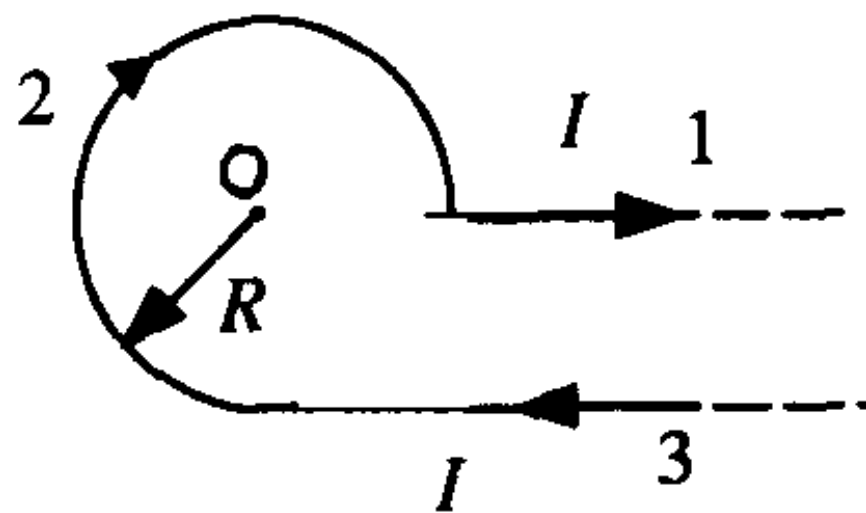


图 6-9

直导线 1: $B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(0 - 0) = 0$

直导线 3: $B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0)$, 方向垂直纸面向里

圆弧导线 2: $B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \frac{3\pi}{2}$, 方向垂直纸面向里

$$B = B_1 + B_2 + B_3$$

所以

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{3\mu_0 I}{8R}, \text{方向垂直纸面向里。}$$

2. [解] 本题的正确答案是(B)。

由右手螺旋法知, 圆电流在环路 L 处产生的磁场处处与环路垂直。

3. [解] 本题正确答案是(C)。

对题目给出的四种说法逐一说明如下:

① A 说法是错误的。 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 并不说明 \mathbf{H} 处处为零, $\oint_L H \cos \theta d\mathbf{l} = 0$ 说明在环路 L 上某些地方 \mathbf{H} 与 $d\mathbf{l}$ 夹角 $\theta < \frac{\pi}{2}$, $\int H \cos \theta d\mathbf{l} > 0$; 在环路 L 的另一些地方, \mathbf{H} 与 $d\mathbf{l}$ 夹角 $\theta > \frac{\pi}{2}$, $\int H \cos \theta d\mathbf{l} < 0$; 在整个环路上就有 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 。

② B 说法是错误的。 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0 = 0$, 说明回路 L 包围电流的代数和为零, 即可能是环路内未包围电流, 也可能是包围的是像同轴电缆那样的电流。

③ C 说法是正确的。

④ D 说法是错误的。 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$ 并不说明 \mathbf{H} 只和 L 内包围的电流有关, 由场迭加原理可知 \mathbf{H} 和 L 外的电流亦有关。

4. [解] 本题的正确答案为(B)。

如图 6-10 所示, 作两个同轴环路 L_1 和 L_2 可知在 $r < R$ 的区域:

$$\oint_{L_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0, \text{ 所以 } B_1 = 0$$

在 $r > R$ 的区域:

$$\oint_{L_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

所以 $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

其 $B-r$ 曲线如答案(B)所示。

5. [解] 本题的正确答案是(B)。

作一环路如图 6-11 所示, 由安培环路定理知

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{ab} B_2 dl + \int_{bc} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} - \\ &\quad \int_{cd} B_1 dl + \int_{da} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \\ &B_2 \overline{ab} - B_1 \overline{cd} = \mu_0 j \overline{ab} \end{aligned}$$

因为 $\overline{ab} = \overline{cd}$, 所以有

$$j = \frac{B_2 - B_1}{\mu_0}$$

6. [解] 本题正确答案是(B)。

作一同轴圆形环路于圆柱体内, 如图 6-12 所示, 由安培环路定理可知

$$\oint_L \mathbf{B} dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$$

由此解得圆柱体内的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \quad (r < R)$$

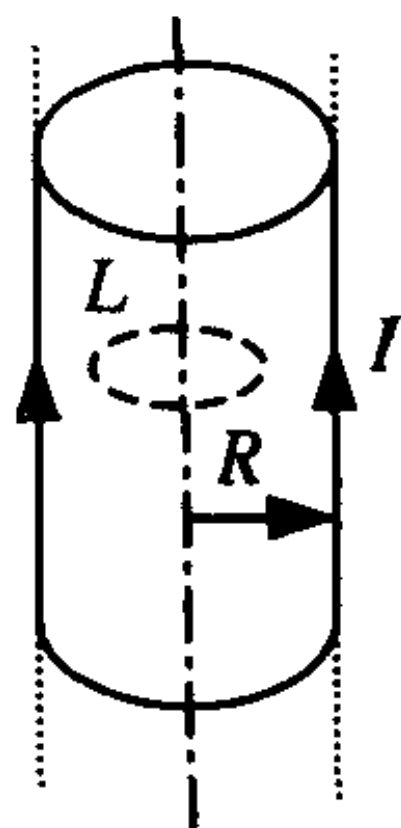


图 6-10

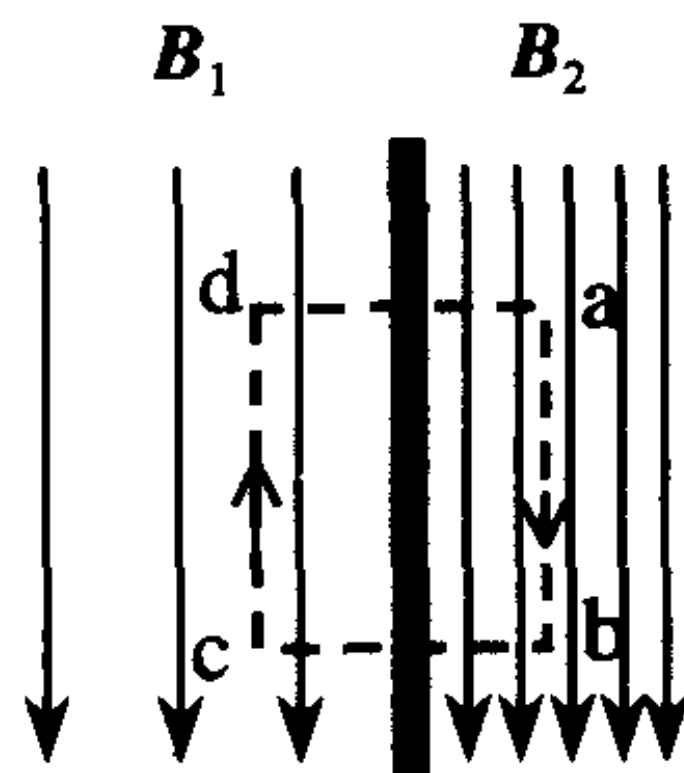


图 6-11

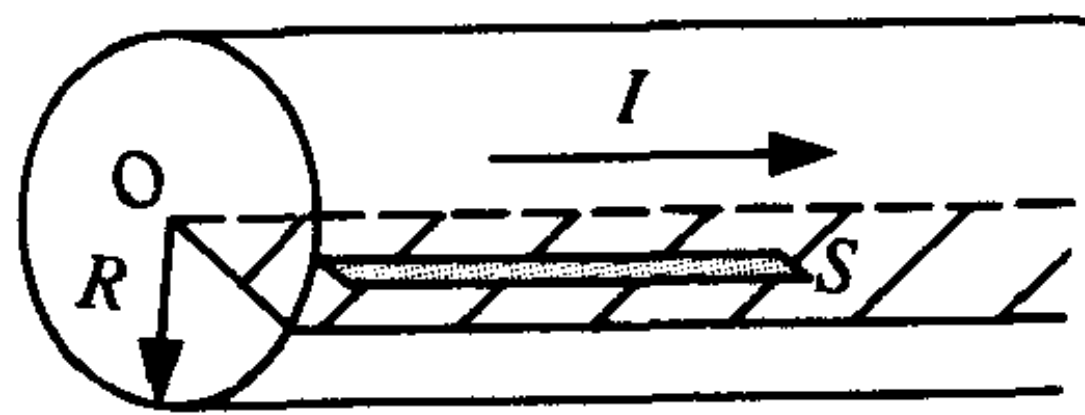


图 6-12

取一平行于轴的面元如图所示, $dS = l \times dr$, 穿过此面元的磁通量为

$$d\Phi_m = B \cdot dS = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} dr$$

通过横切面单位长度的磁通量为

$$\Phi_m = \int_0^R \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} dr = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} R^2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

7. [解] 本题正确答案为(A)。

平面载流线圈的磁矩 $p_m = IS\hat{n}$, 磁矩方向和线圈电流方向成右手螺旋关系, 方向指向纸面内。磁矩的大小为

$$p_m = I\left(\frac{\pi}{2}R^2 + \frac{\pi}{2}(2R^2)\right) = \frac{5}{2}\pi R^2 I$$

线圈在磁场中的磁力矩

$$M_m = p_m \times B$$

方向由 O'_1 指向 O_1

大小为 $M_m = p_m \sin \frac{\pi}{2} B = \frac{5}{2}\pi R^2 IB$

线圈在此磁力矩作用下将绕 $O_1 O'_1$ 轴逆时针转动。

8. [解] 本题正确答案为(C)。

金属片中的载流子是电子, 电子的运动方向沿电流的反方向, 在磁场中受到洛伦兹力作用。

$$f_e = -ev \times B$$

方向如图6-13所示, 故电子将向金属片a端漂移, 从而使a端积累负电荷, b端因缺少电子而积累正电荷。所以b端电势高于a端电势。

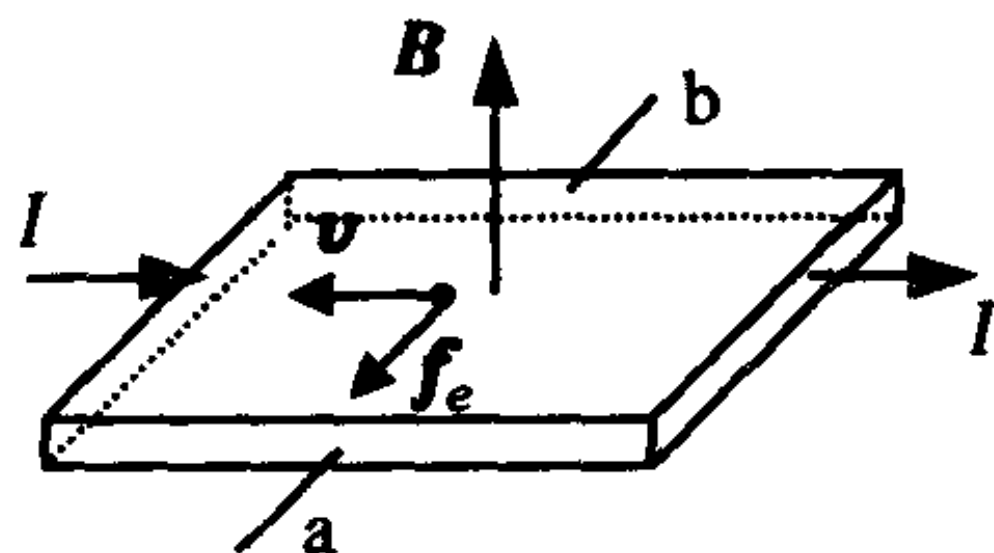


图 6-13

9. [解] 本题正确答案是(D)。

在电磁场中, 当电荷 q 受力 $f_e + f_m = 0$ 时, 将作匀速直线运

动。由图 6-8 可知, q 受到的洛伦兹外力

$$f_m = qv \times B = qvB(i \times j) = qvBk$$

所以 q 受到的电场力应为

$$f_e = -qvBk = qE, \quad E = -vBk$$

二、填空题

1. 北京正负电子对撞机的储存环是周长为 240 m 的近似圆形的轨道。环中电子的速率可接近光速, 当环中的电子流强度为 8 mA 时, 在整个环中有 _____ 个电子在运行。

2. 对于图 6-14 所示的电流和回路, H 的环流分别为

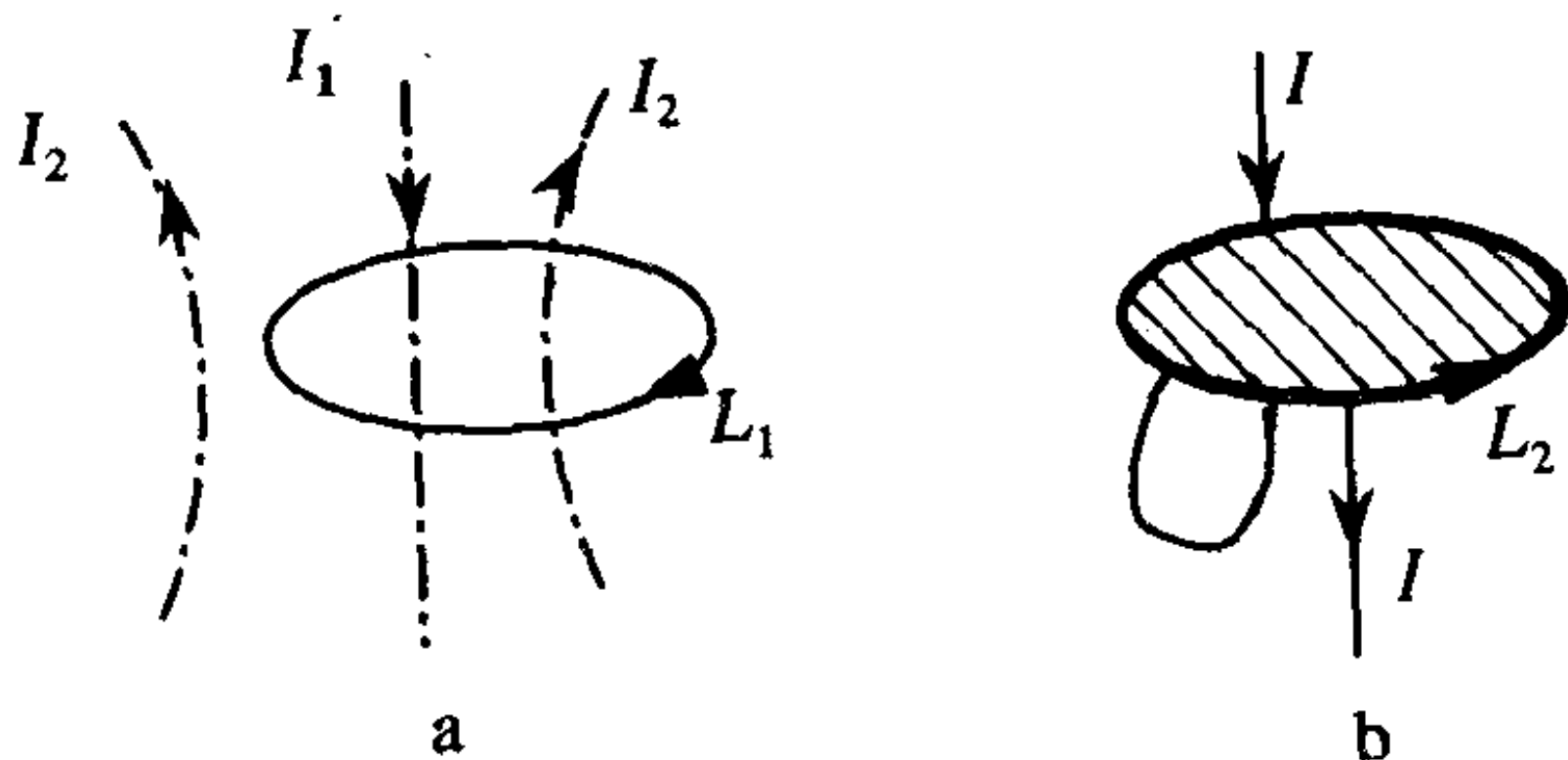


图 6-14

① $\oint_{L_1} Hdl = \underline{\hspace{2cm}};$

② $\oint_{L_2} Hdl = \underline{\hspace{2cm}};$

3. 如图 6-15 所示, 用均匀细金属丝构成一半径为 R 的圆环, 电流通过直导线 1 从 a 点流入圆环, 再由 b 点通过直导线 2 流出圆环。设导线 1, 导线 2 与圆环共面, 则环心 O 点的磁感应强度 B 的大小为 _____, 方向

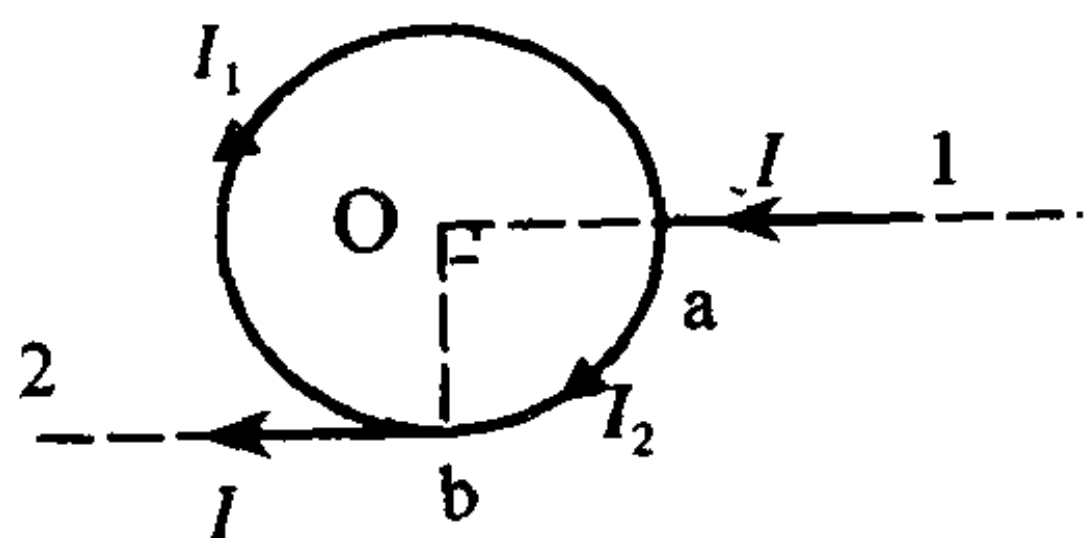


图 6-15

为_____。

4. 一电子以速率 v 绕原子核旋转, 若电子旋转的等效轨道半径为 r_0 , 则在等效轨道中心处产生的磁感应强度大小 $B =$ _____。如果将电子绕原子核运动等效为一圆电流, 则等效电流 $I =$ _____, 其磁矩 $p_m =$ _____。

5. 一半径为 R 的薄塑料圆盘, 在盘面均匀分布着电荷 q , 若圆盘绕通过圆心、且与盘面垂直的轴以角速度 ω 作匀速转动时, 在盘心处的磁感应强度 $B =$ _____。

6. 一载有电流的 $1/4$ 圆周回路 $abca$ (电流 I , 圆弧部分的半径为 R), 置于磁感应强度为 B 的均匀磁场中, 如图 6-16 所示, 则外磁场 B 作用于回路各段的安培力 F 、回路所受的合力 $\sum F$ 、回路的磁矩 P_m 及回路所受的磁力矩 M_m 分别为

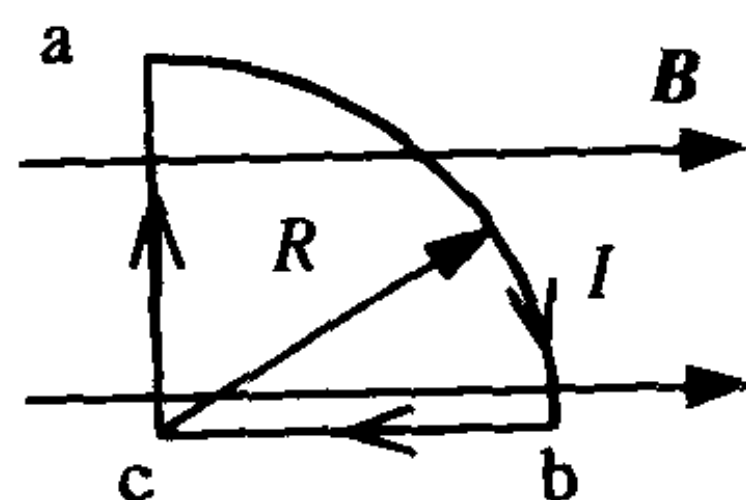


图 6-16

$$F_{ab} = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$F_{ac} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$F_{bc} = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \sum F = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$P_m = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \text{方向} \underline{\hspace{2cm}};$$

$$M_m = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \text{方向} \underline{\hspace{2cm}}.$$

7. 磁介质处于磁场中将产生 _____ 现象, 按照磁化电流产生的附加磁场的方向不同和大小不同, 磁介质可分为 _____ 三大类, 图 6-17 画出的曲线称为铁磁质的 _____, 图中 H_c 称为 _____。

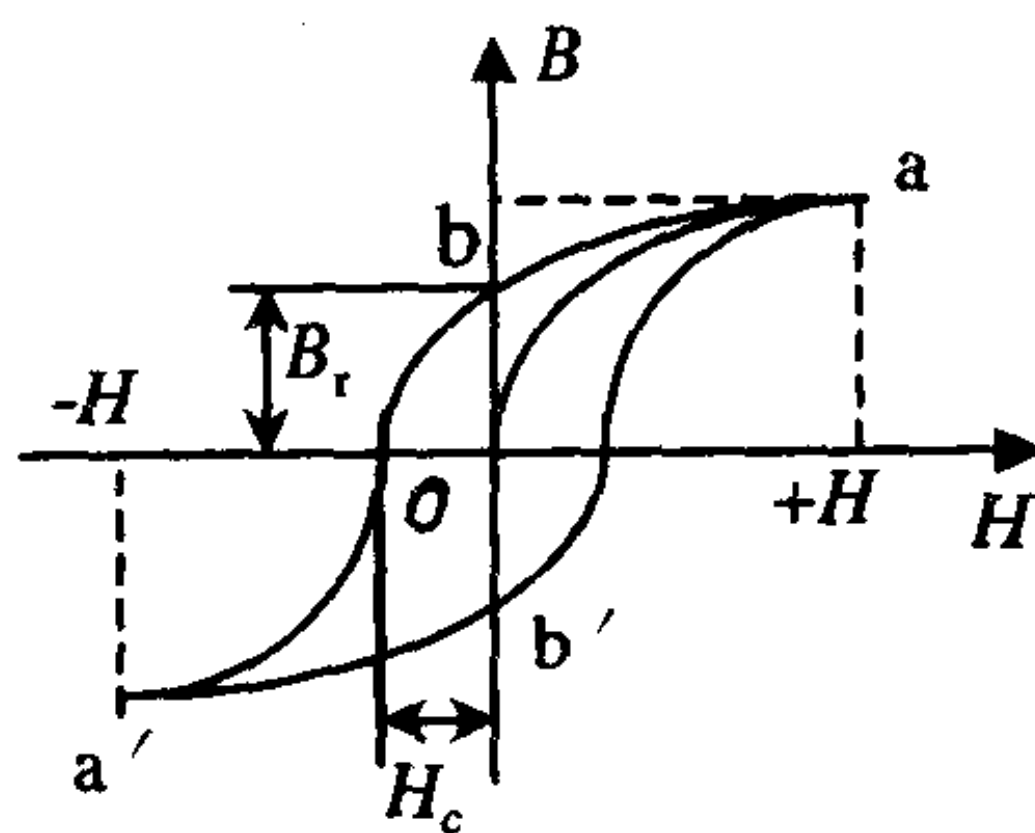


图 6-17

8. 一均匀密绕螺绕环, 共有 N 匝, 通有电流 I , 密绕环的横截面为矩形, 密绕环的尺寸及形状如图 6-18 所示, 密绕环内的相对磁导率是 μ_r , 环内距中心为 r ($R < r < R + a$) 处的磁感应强度的大小为 $B =$ _____, 通过环上任一横截面的磁通量为 $\Phi_m =$ _____。

9. 两个电子在真空中运动并相遇, 相隔距离为 r 时, 两电子速率相同, 运动方向如图 6-19 所示, 则此时任一电子所受的洛伦兹力(磁力)与库仑力的比值为 $\frac{f_m}{f_e} =$ _____, 若 $v = 6 \times 10^3 \text{ m/s}$, 此比值的具体数值为 _____。

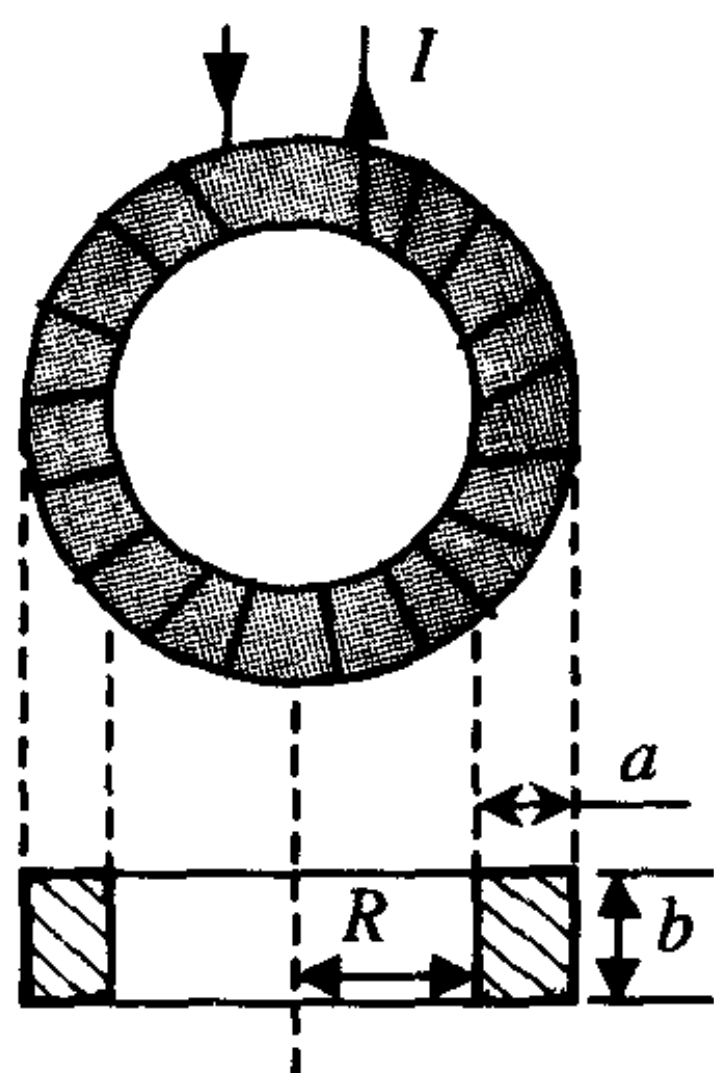


图 6-18

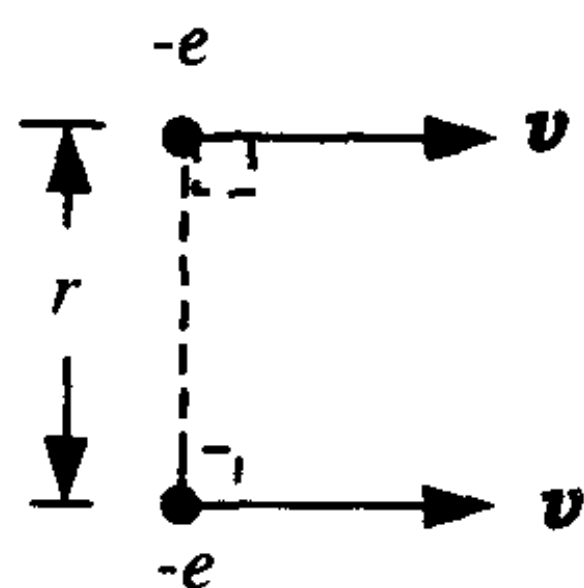


图 6-19

填空题解答

1. [解] 电流强度的微观表示形式为 $I = qnvS$ 。

取 $v \approx C$, 则 $I = qnCS$ 。(其中 S 为对撞机的截面积)

在储存环中运动的电子总数为 N , 即

$$N = nS \times 2\pi R = \frac{I}{qC} 2\pi R$$

已知 $I = 8 \text{ mA}$, $R = 240 \text{ m}$, $q = e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $C = 3 \times$

10^8 m/s 代入得

$$N = \frac{2 \times 3.14 \times 240 \times 8 \times 10^{-3}}{1.6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^8} = 2.512 \times 10^{11} \text{ 个}$$

即在整个储存环中有 $N = 2.512 \times 10^{11}$ 个电子在运动。

$$2. [\text{解}] (a) \oint_{L_1} H dl = I_1 - I_2; \quad (b) \oint_{L_2} H dl = -2I.$$

3. [解] 如图 6-20 所示, 电流从 a 点沿直导线 1 流入圆环分为 I_1 和 I_2 。O 点的磁场由四部分电流的磁场叠加而得

$$B = B_1 + B_2 + B_{I1} + B_{I2}$$

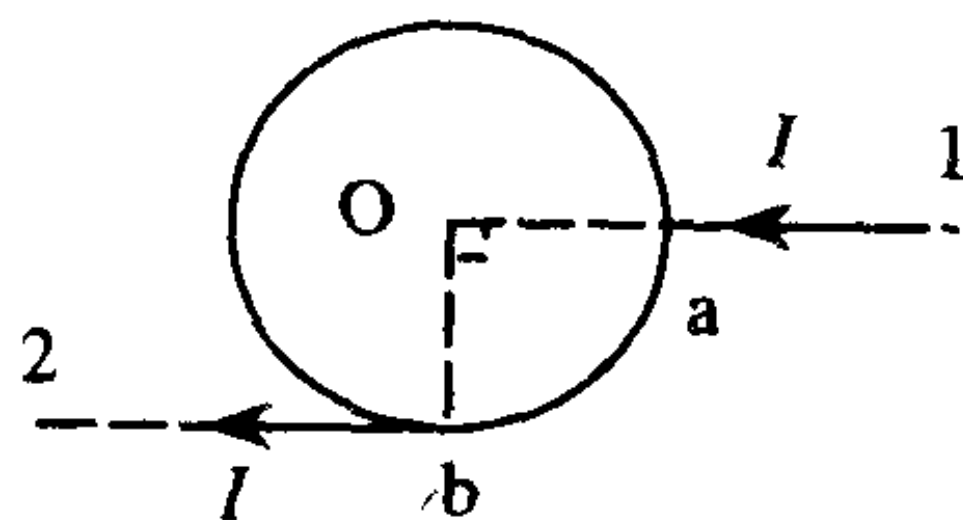


图 6-20

由图可知

$$B_1 = 0,$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \frac{\pi}{2} - \cos \pi) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}, \text{ 方向 } \otimes$$

$$B_{I1} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi R} \times \frac{3}{2}\pi, \quad \text{方向 } \odot$$

$$B_{I2} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi R} \times \frac{\pi}{2}, \quad \text{方向 } \otimes$$

由欧姆定律可知, $I_1 R_1 = I_2 R_2$, $R = \frac{\rho l}{S}$

$$\text{所以} \quad I_1 \frac{\rho l_1}{S} = I_2 \frac{\rho l_2}{S}$$

$$\text{其中} \quad l_1 = \frac{2}{3}\pi R, \quad l_2 = \frac{\pi}{2}R$$

代入上式得

$$I_1 \frac{2}{3}\pi = I_2 \frac{1}{2}\pi$$

由此可知

$$B_{I1} + B_{I2} = 0$$

故

$$B = B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

方向垂直纸面向里。

4. [解] 已知运动电荷在空间产生的磁场为

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv \times r}{r^3}$$

电子绕核作圆周运动, $v \perp r$ 。所以, 在等效轨道中心产生的磁感应强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 qv}{4\pi r_0^2}$$

等效电流为

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{e}{T} = \frac{\omega}{2\pi} e$$

其磁矩为

$$p_m = IS = \frac{\omega}{2\pi} e \pi r_0^2 = \frac{1}{2} e \omega r_0^2$$

5. [解] 将圆盘分割为一系列半径不同的同心圆环, 其中如图 6-21 所示的圆环在旋转时的等效电流为

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi} dq, \quad dq = \frac{q}{\pi R^2} 2\pi r dr$$

所以
$$dI = \frac{q\omega}{\pi R^2} r dr$$

已知一个载流圆环在圆心处产生的磁场是 $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$ 。带电圆环在旋转时在圆心处产生的磁场为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2} dr$$

整个带电圆盘旋转时在圆心处产生的磁场为

$$B = \int dB = \int_0^R \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R^2} dr = \frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R}$$

6. [解] 如图 6-22 所示, 由安培安律知, 一个电流元在磁场中受到的磁力为 $F = Idl \times B$ 。由此可知

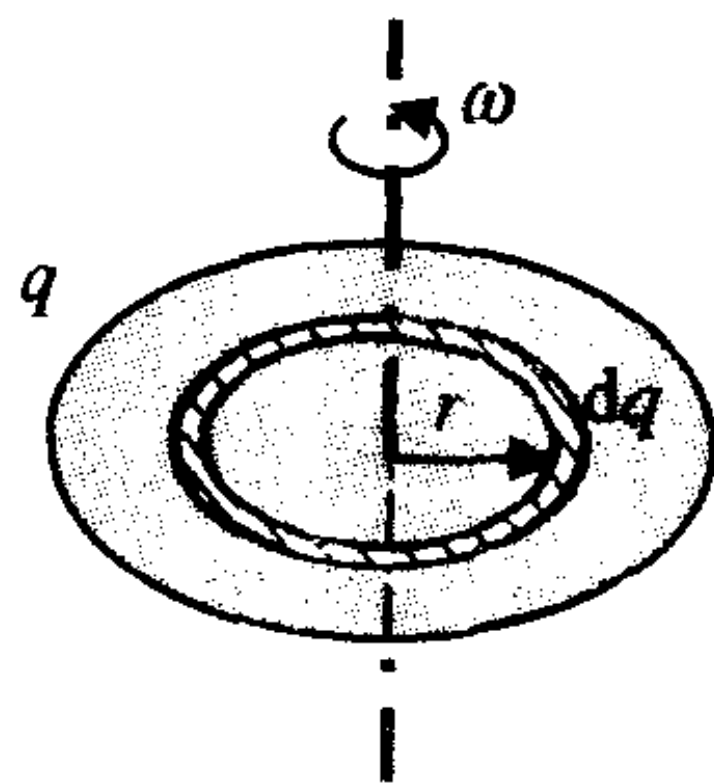


图 6-21

$$F_{ab} = \int_{ab} Idl \sin \theta B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} IB R \sin \theta d\theta = -IBR$$

方向垂直纸面向外

$$F_{bc} = \int_{bc} Idl \sin \frac{\pi}{2} B = IBR$$

方向垂直纸面向里。

$$F_{bc} = \int_{bc} Idl \sin \pi B = 0$$

线圈所受的合力为 $\sum F = 0$

磁矩 $p_m = IS = \frac{1}{4}\pi R^2 I$, 方向垂直纸面向里。

磁力矩 $M_m = p_m \times B$

$$M_m = \frac{1}{4}\pi R^2 IB, \text{ 方向向下。}$$

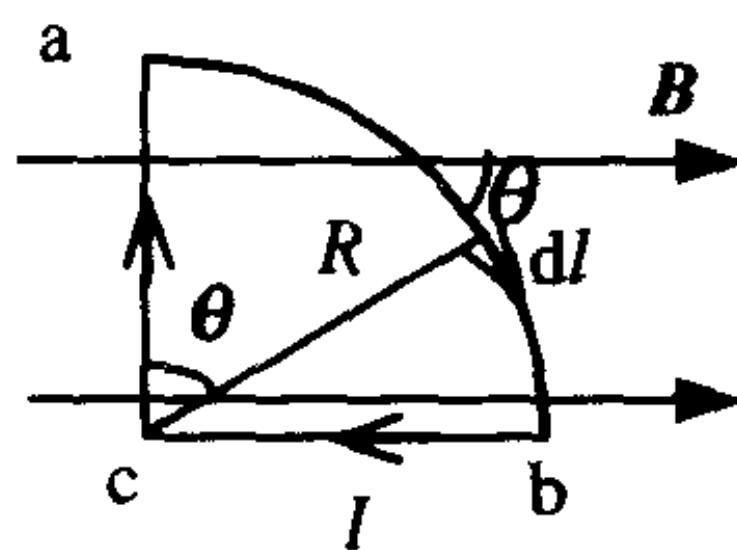


图 6-22

7. [解] 磁介质在磁场中将产生磁化现象, 磁介质大致可分为顺磁质、抗磁质和铁磁质三大类。图 6-17 画出的曲线是铁磁质的磁滞回线, 其中 H_c 称为矫顽力。

8. [解] 如图 6-23 所示, 在密绕环中作一个半径为 r 的同心圆形环路, 由安培环路定律

$$\oint_L H \cdot dl = \sum I_0$$

可知, 环内磁场分布为

$$H = \frac{NI}{2\pi r}, \quad B = \mu_0 \mu_r H$$

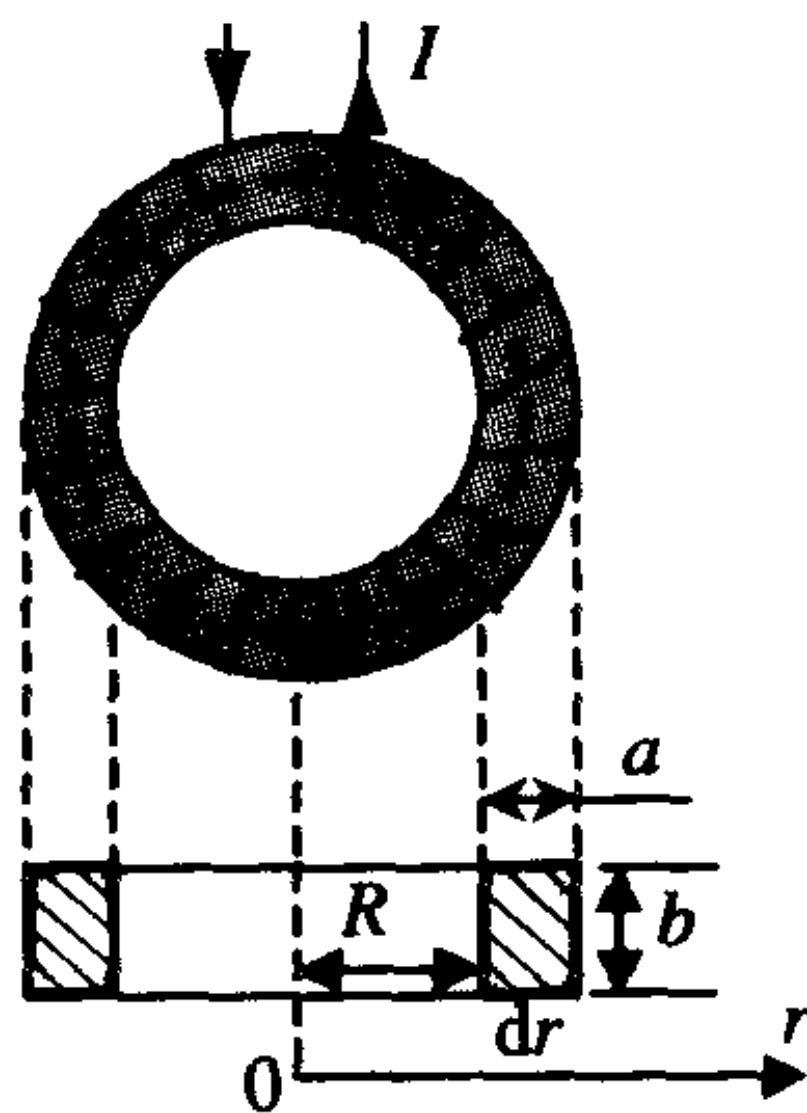


图 6-23

$$B = \mu_0 \mu_r H = \frac{\mu_0 \mu_r N I}{2\pi r} \quad (R < r < R + a)$$

在圆环横截面上取一面积元

$$dS = bdr$$

则穿过该面元的磁通量为

$$d\Phi_m = B \cdot dS = B bdr = \frac{\mu_0 \mu_r N I}{2\pi r} bdr$$

通过环上任一横截面的磁通量为

$$\Phi_m = \int_R^{R+a} \frac{\mu_0 \mu_r N I}{2\pi r} bdr = \frac{\mu_0 \mu_r N I b}{2\pi} \ln \frac{R+a}{R}$$

9. [解] 如图将电子 1 作为场源, 将电子 2 作为场中受力的带电粒子。

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

其中 $\mathbf{E} = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-e\mathbf{v}}{r^2}$

\mathbf{E}, \mathbf{B} 方向如图 6-24 所示。

电子 2 受到的静电力和洛伦兹力分别为

$$\mathbf{f}_e = -e\mathbf{E}, \quad \mathbf{f}_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\mathbf{f}_m = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{f}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^2 v^2}{r^2}$$

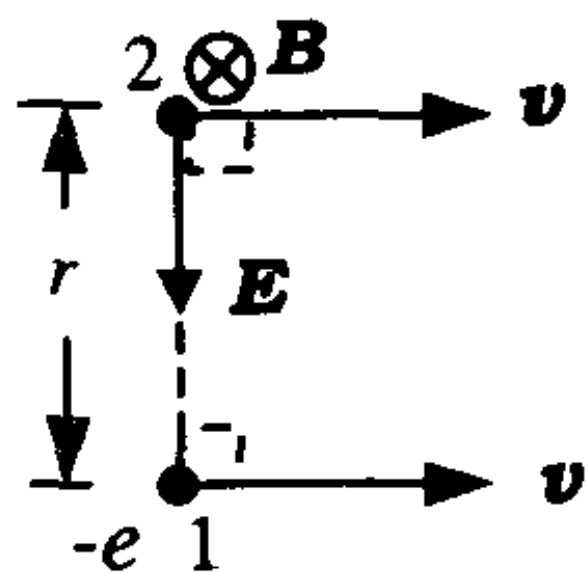


图 6-24

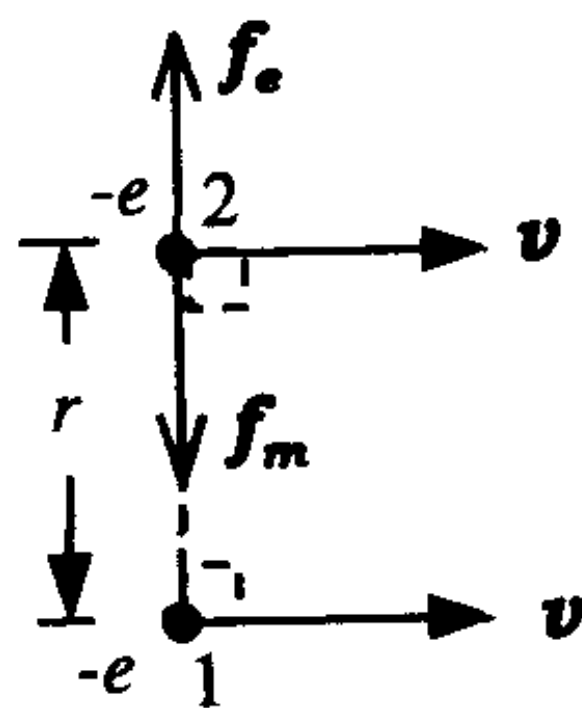


图 6-25

静电力和洛伦兹力的方向如图 6-25 所示。

所以 $f_m/f_e = \epsilon_0 \mu_0 v^2$

将 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{F/m}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2$ 代入可得

$$f_m/f_e = 4 \times 10^{-10}$$

三、问答题

1. 简述磁流体发电机的工作原理,并画出示意图。

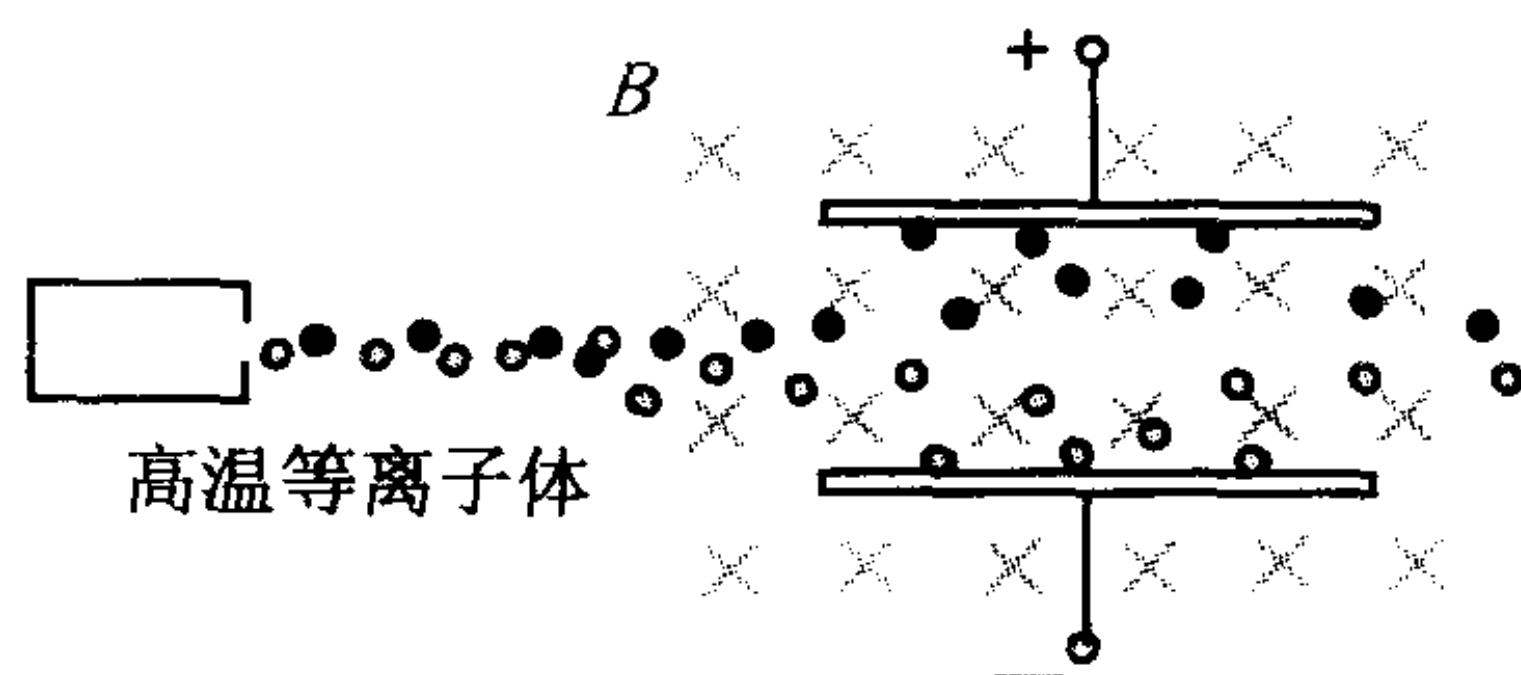


图 6-26

[答] 如图 6-26 所示,是磁流体发电机的工作原理示意图。高温等离子气体发生源可将气体加热到几千度以上的高温,使气体完全电离成高温等离子体。当高温等离子体高速通过垂直于运动方向的磁场到达平行板电极 1,2 之间时,将受到洛伦兹力 $f_m = qv \times B$ 的作用。正离子在洛伦兹力作用下向电极板 1 方向运动,负离子在洛伦兹力作用下向电极板 2 方向运动,从而在两极板之间形成稳定的电势差。如果气体的流速为 v ,电极板间距为 d ,磁流体发电机的电势差为

$$U = vBd$$

如果采用强磁场和高流速的气体流,就会产生实用的电力输出。磁流体发电机的最大优点是不需要能量转换,而且磁流体发电机中的热气流经过第一次发电后出来,还可进入传统的涡轮发电机实现第二次发电,发电效率大大提高。

四、计算题

1. 如图 6-27 所示,一半径为 R 的无限长半圆柱形金属薄片,其上沿轴线方向均匀分布着电流强度为 I 的电流。

① 试求该半圆柱形金属薄片在轴线上任一点处的磁感应强度 B ;

② 如在轴线上放一等值而反向的无限长截流直导线,求直导线上单位长度受到的安培力 F 。

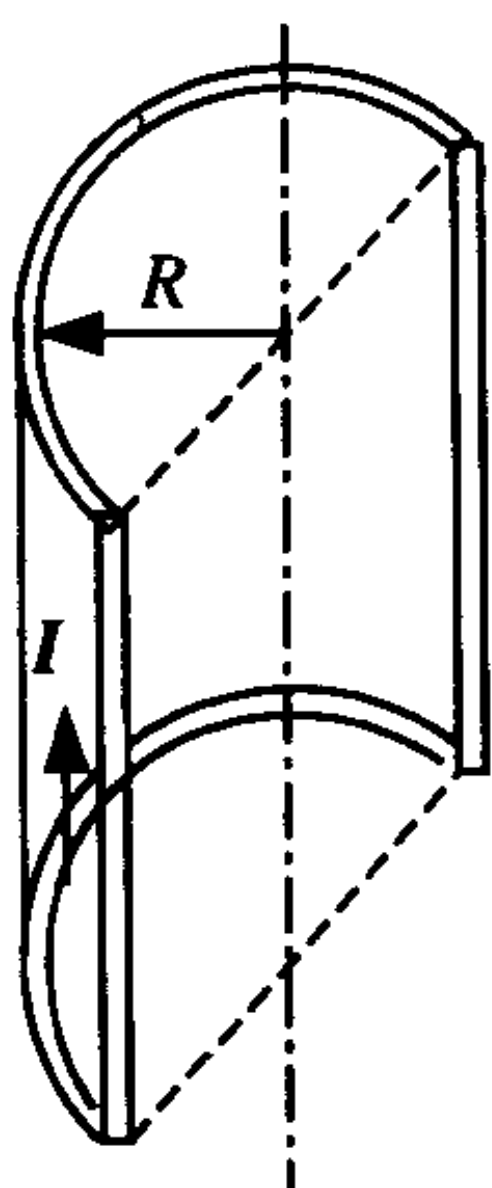


图 6-27

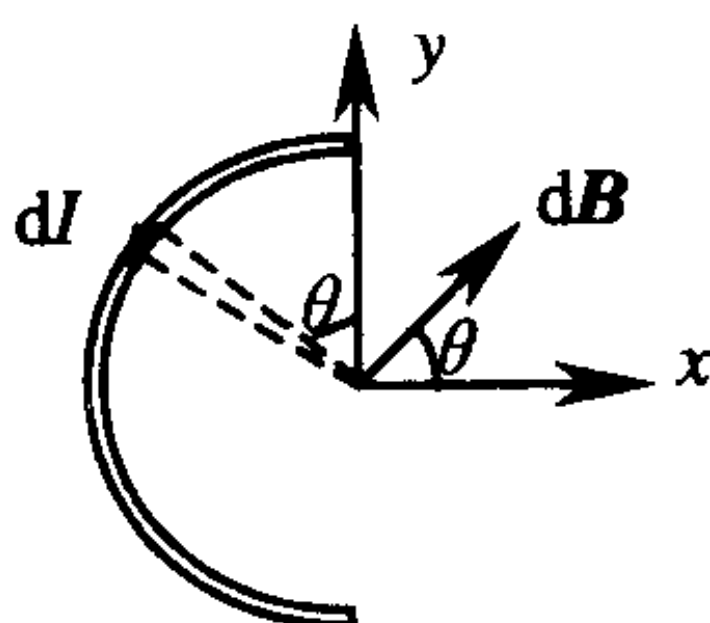


图 6-28

[解] ① 如图 6-28 所示,首先将半圆柱形通电金属薄片分割为无穷多个平行于轴线的无限长直载流导线。

每个直导线所载电流

$$dI = jdl$$

其中 $j = \frac{I}{\pi R} \quad dl = R d\theta$

该直导线在 O 点产生的磁场为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} d\theta$$

由对称性分析可知,各长直载流导线在 O 点磁场的迭加只有

y 方向分量不为零, x 方向的分量均相互抵消。

$$B = \int dB \sin \theta = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

② 载流直导线与半圆柱形金属薄片电流反向, 故直导线受到的单位长度的排斥力为

$$\frac{dF}{dl} = \frac{Idl \times B}{dl} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 R} i$$

2. 如图 6-29 所示, 一无限长直导线通有电流 I_1 , 旁边放有一直角三角形回路, 回路中通有电流 I_2 , 回路与长直导线共面。求:

① 电流 I_1 的磁场分别作用在三角形回路上各段的安培力;

② 通过三角形回路的磁通量 Φ_m 。

[解] ① 根据安培定律 $dF = Idl \times B$ 计算三角形回路 ab , bc , ca 三边所受安培力。

无限长载流直导线磁感应强度表达式为 $B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$, 三角形回路三边电流元均与磁场垂直。

ab 段: 各电流元处 B 值相同。

$$F_{ab} = I_2 B \overline{ab} = \frac{\sqrt{3} \mu_0 b I_1 I_2}{2\pi(d+l)}$$

方向如图 6-30 所示。

$$bc \text{ 段: } dF = I_2 B dl = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{dr}{r}, \quad (dl = -dr)$$

$$F_{bc} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_d^{d+l} \frac{dr}{r} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{d+l}{d},$$

方向如图(6-30)所示。

ca 段:

$$dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{dl}{r}, \quad dl = 2dr$$

$$F_{ca} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi} \int_d^{d+l} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi} \ln \frac{d+l}{d}$$

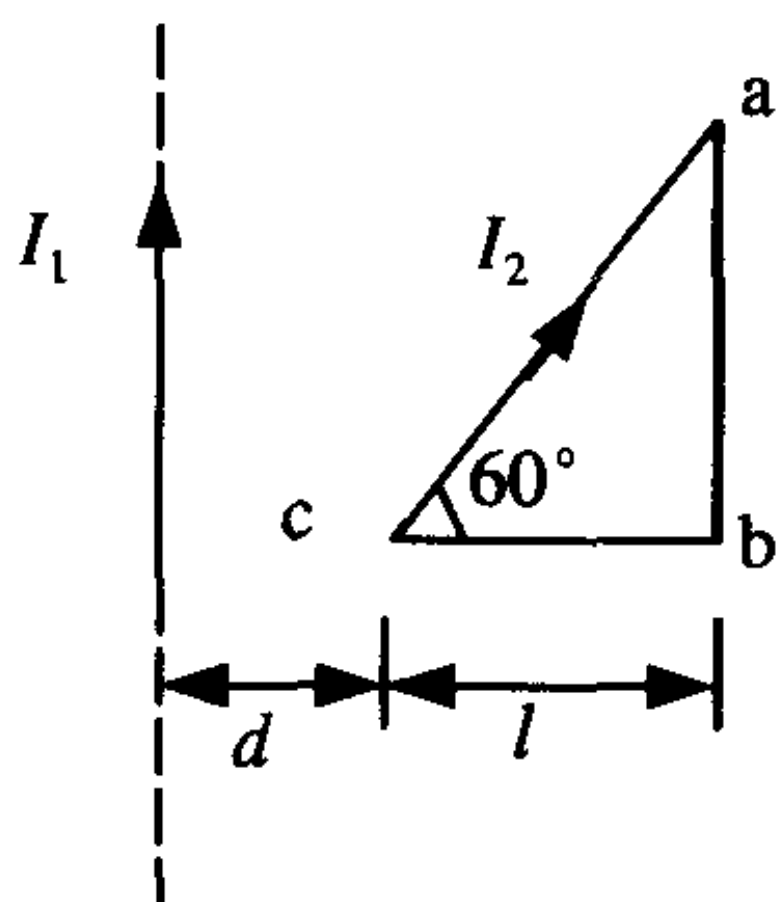


图 6-29

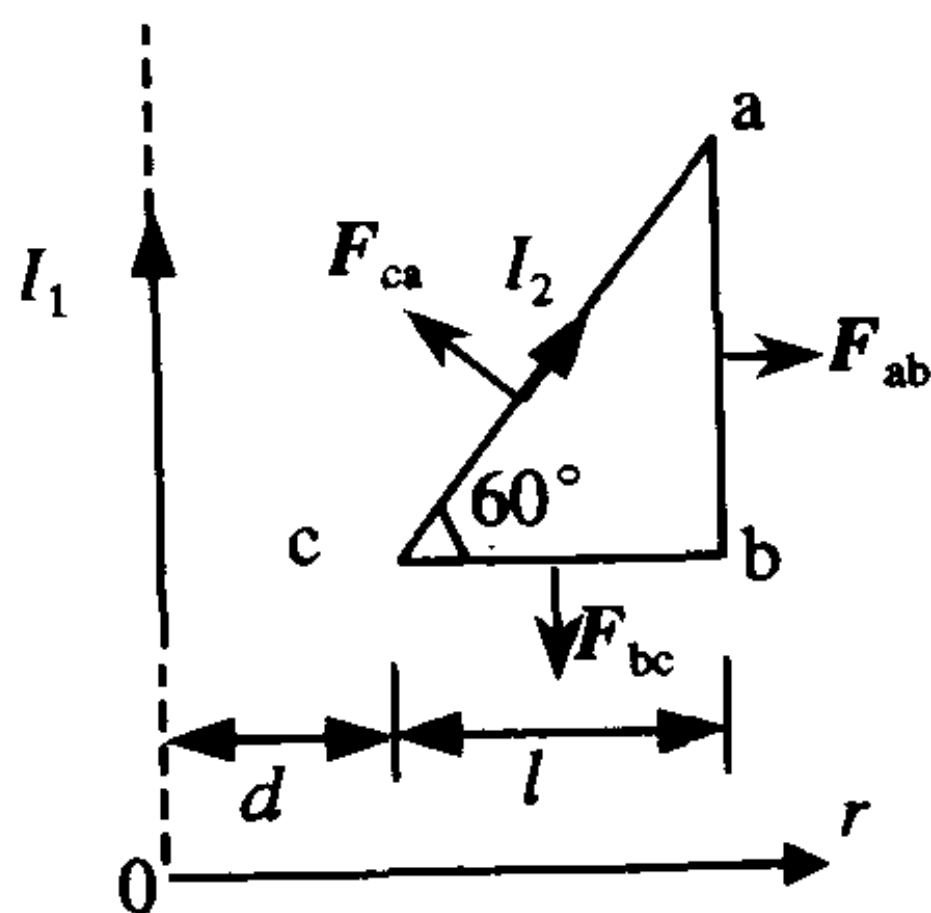


图 6-30

方向如图 6-30 所示。

② 取距电流 I_1 为 $r - r + dr$ 窄条面积作为面积元:

$$d\Phi_m = B \cdot dS =$$

$$B(r - d)\tan 60^\circ dr = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I_1}{2\pi r}(r - d)dr =$$

$$\frac{\sqrt{3}\mu_0 I_1}{2\pi}\left(1 - \frac{d}{r}\right)dr$$

$$\Phi_m = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I_1}{2\pi}\left(\int_d^{d+l} dr - d\int_d^{d+l} \frac{dr}{r}\right) =$$

$$\frac{\sqrt{3}\mu_0 I_1}{2\pi}\left(l - d\ln \frac{d+l}{d}\right)$$

3. 如图 6-31 所示, 一根半径为 R_1 的无限长圆柱形导体棒, 棒内有半径为 R_2 的圆柱状空心部分, 空心部分的轴线与导体棒的轴线平行, 两轴间距为 a , 且 $a > R_2$ 。现有电流 I 沿导体棒的轴向流动, 电流均匀分布在棒的横截面上, 求:

① 导体棒轴线上的磁感应强度的大小 B_0 ;

② 空心部分轴线上的磁感应强度的大小 B'_0 。

[解] 导体棒内电流密度 j 处处相同, 其大小 $j =$

$\frac{I}{\pi(R_1^2 - R_2^2)}$ 运用补偿法作如下设想：题中给出的情况可看作半径为 R_1 、通有电流密度 j 的实心圆柱导体棒，和半径为 R_2 、通有反向但等值电流密度的实心圆柱导体棒两者产生的磁场叠加的结果。因为一切抗磁质及大多数顺磁质的 μ_r 与 1 相差极微，在这里当作真空处理。

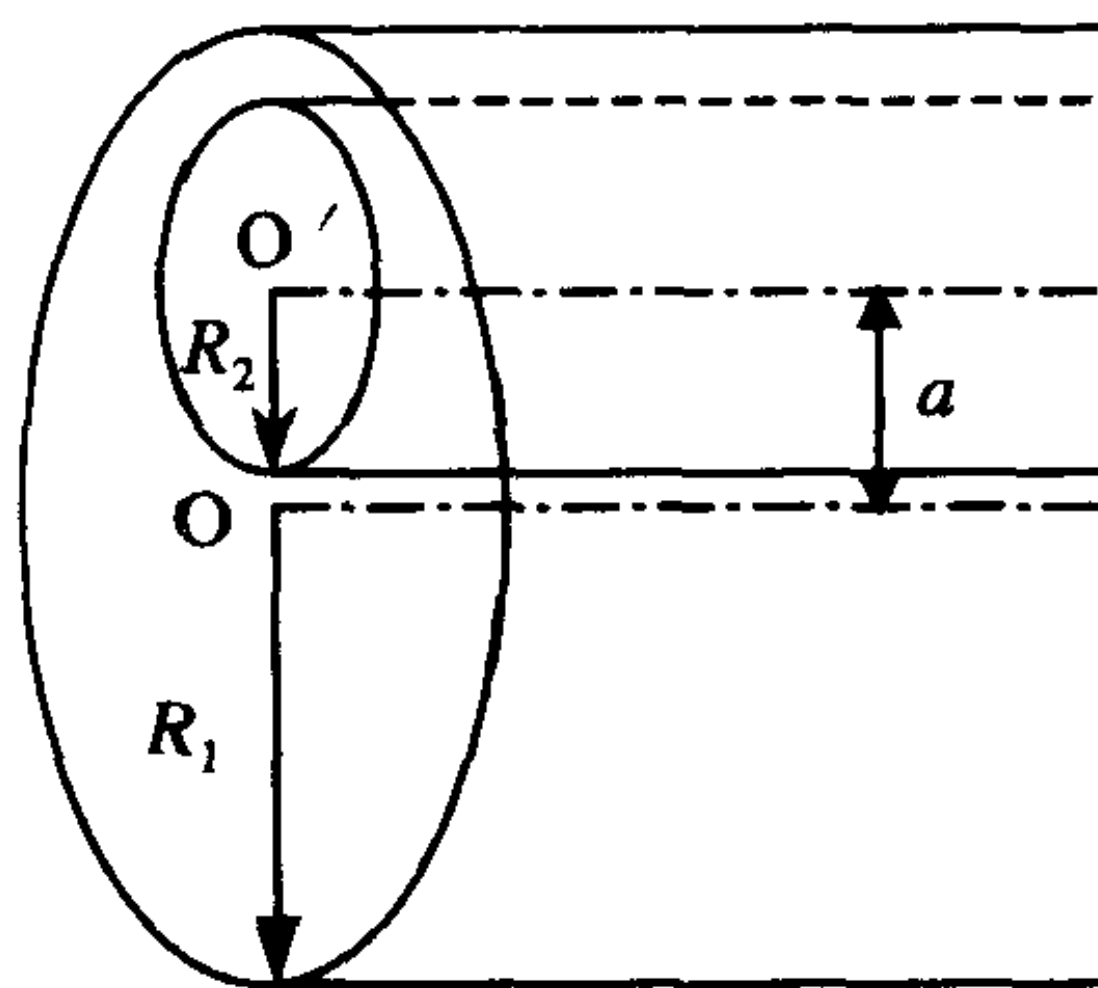


图 6-31

① 载流大圆柱体，由于电流分布呈轴对称性，故在其轴线上某点产生的磁感应强度 $B_{10} = 0$ 。载流小圆柱体在该点产生的磁感应强度 B_{20} 由安培环路定律 $\oint_L H \cdot dl = \sum I$ 求出。以 a 为半径取一圆形回路。

$$H_{20} \times 2\pi a = \pi R_2^2 j$$

$$H_{20} = \frac{R_2^2 j}{2a}, \quad B_{20} = \frac{\mu_0 R_2^2 j}{2a}$$

$$B_0 = B_{10} + B_{20} = \frac{\mu_0 R_2^2}{2a} j = \frac{\mu_0 I R_2^2}{2\pi a (R_1^2 - R_2^2)}$$

② 同理 $B'_{20} = 0$

$$H'_{10} \times 2\pi a = \pi a^2 j$$

$$H'_{10} = \frac{a j}{2}, \quad B'_{10} = \frac{\mu_0 a j}{2}$$

$$B'_0 = B'_{10} + B'_{20} = \frac{\mu_0 a j}{2} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi (R_1^2 - R_2^2)}$$

五、附加题

1. 如图 6-32 所示，半径为 R 的均匀带电薄圆盘，带电量为 q ，将其放在磁感应强度为 B 的均匀磁场中， B 的方向与盘面平行，当

圆盘以角速度 ω 绕过盘心且垂直于盘的轴逆时针转动时,求

- ① 此圆盘的磁矩 P_m ;
- ② 圆盘在磁场中所受磁力矩 M_m 的大小和方向。

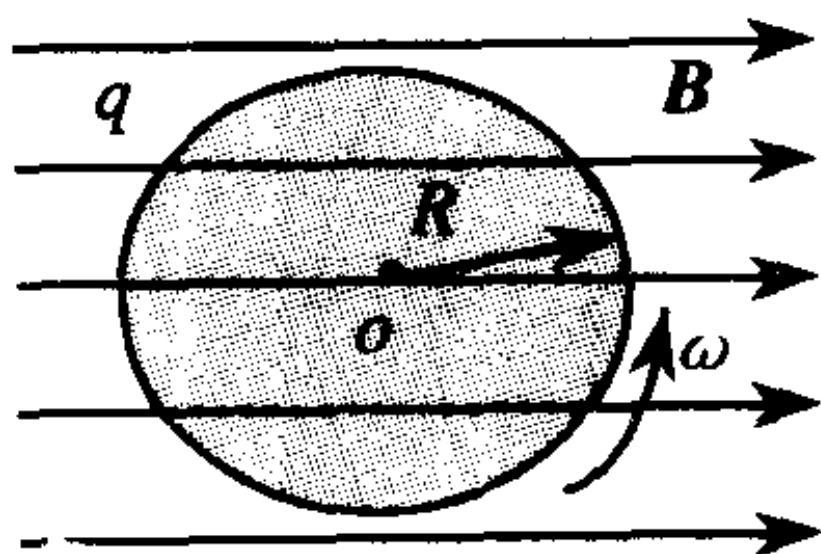


图 6-32

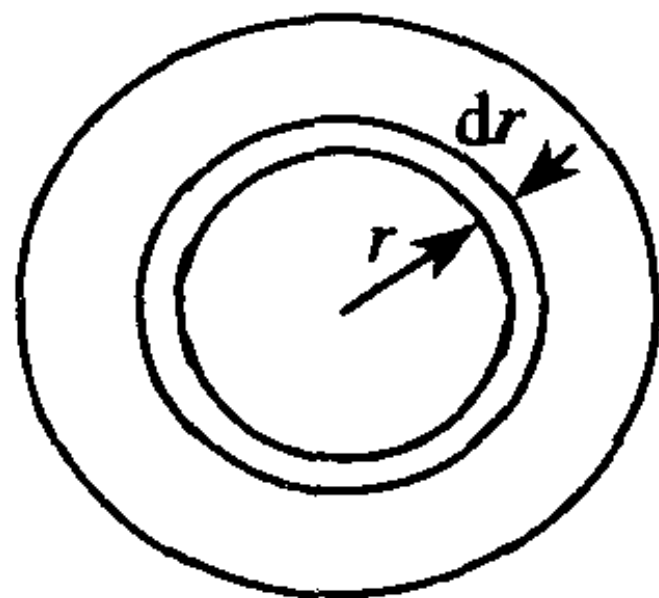


图 6-33

[解] ① 如图 6-33, 在圆盘上取半径为 r , 宽为 dr 的环带, 先求出此环带转动时的磁矩。此环带转动时的等效电流为

$$dI = \frac{d}{T} dq = \frac{\omega}{2\pi} dq$$

其中

$$dq = \frac{q}{\pi R^2} 2\pi r dr$$

则

$$dP_m = S dI = \pi r^2 dI = \frac{\omega q}{R^2} r^3 dr$$

整个圆盘的磁矩为

$$P_m = \frac{\omega q}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4} \omega q R^2$$

磁矩的方向垂直纸面向外。

$$\text{② 磁力矩 } \mathbf{M} = \mathbf{P} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{P}_m \perp \mathbf{B}$$

$$M = \frac{1}{4} \omega q R^2 B$$

磁力矩的方向平行纸面向上。

2. 2000 年是太阳黑子活动高峰年, 太阳表面的强磁爆发生时, 会把大量的高能带电粒子流抛向地球。如果没有地磁场存在的话, 这些高能带电粒子流将会对地球上的生物造成极大的伤害。但事实上, 在离地面几千公里和两万公里的高空, 分别存在着由地磁

场形成的两个范·阿仑辐射带，它们大大地缓解了太阳强磁爆对地球表面的影响，请你用学到的知识对此加以分析说明。

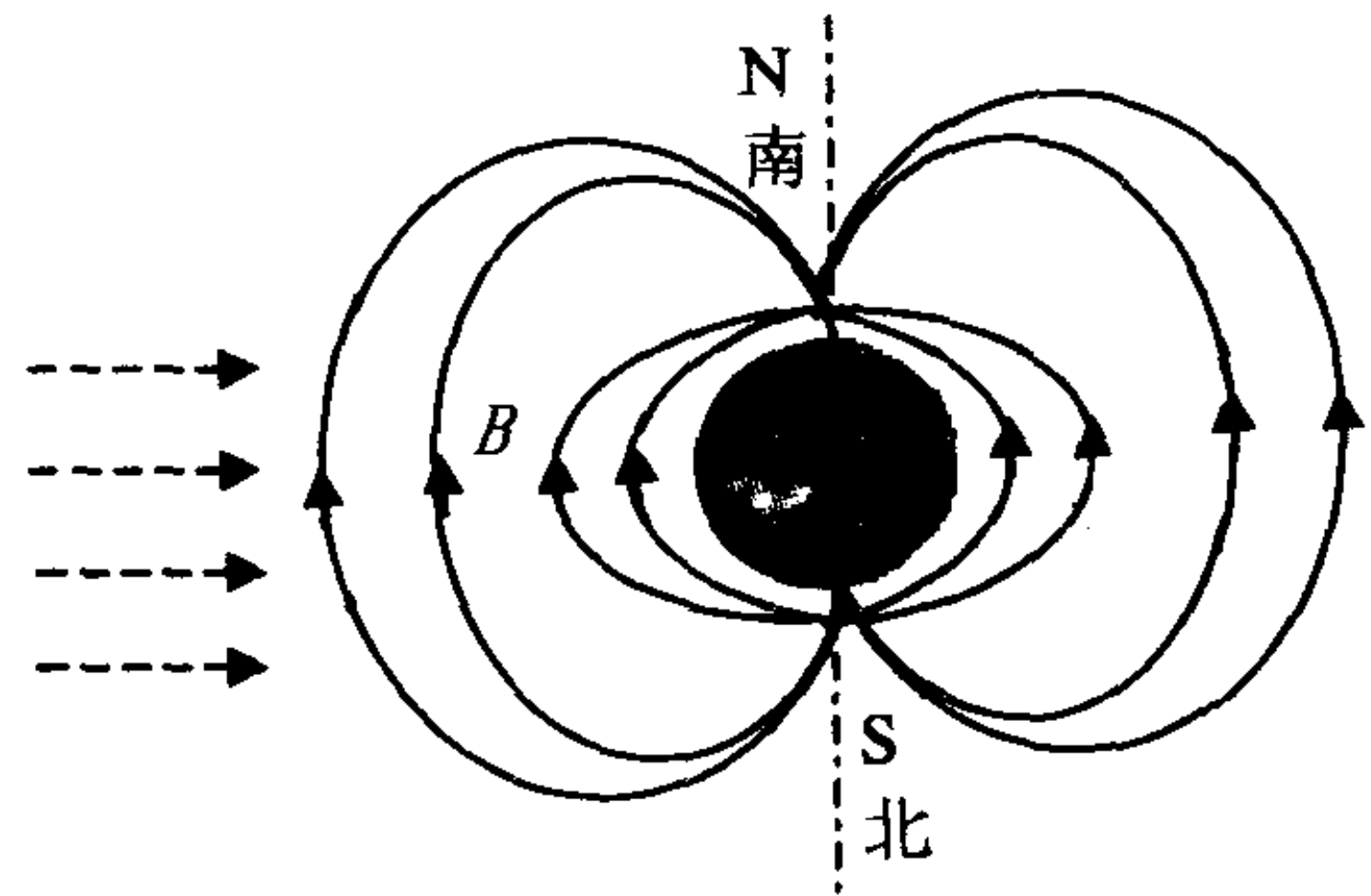


图 6 - 34

[答] 如图 6 - 34 所示，如果高能带电粒子流进入地磁场的范·阿仑辐射带，将会在洛伦兹力作用下被捕获，在辐射带中绕磁场运动。

由于范·阿仑辐射带的磁场在靠近地球两极处强而在赤道平面附近弱，带电粒子在这种非均匀磁场中的洛伦兹力，除过提供粒子作绕磁场方向的圆运动外，还使带电粒子受到一个恒指向弱磁场方向的力的作用，从而使带电粒子中的大部分在到达地磁场的两极后不能逃出辐射带而又折返回来。这使得范·阿仑辐射带像一个磁约束装置，它将进入地磁场的大部分高能带电粒子约束于其中，从而保护了生活在地球表面的生物。

但是，太阳强磁爆发生时，会对卫星通讯和飞行安全造成一定的干扰和影响。

第 7 章 电磁感应与电磁场

一、选择题

1. 如图 7-1 所示, 一矩形导体框, 以速度 v 从 a 处进入一均匀磁场区域并从 b 处出来。若不计导体框的自感, 下面哪条曲线正确地表示了线圈中的感应电流随时间的变化关系(以顺时针方向为正)()

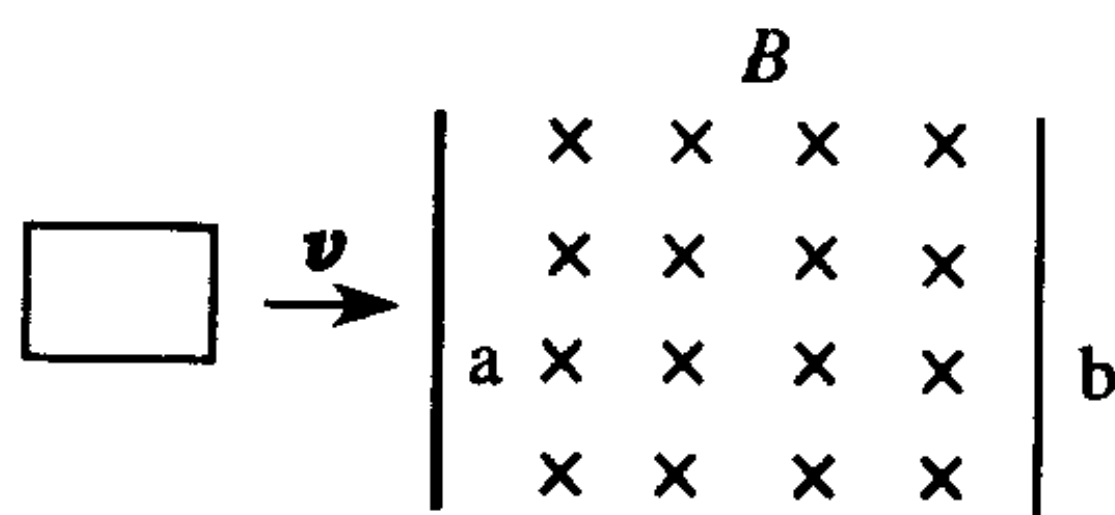
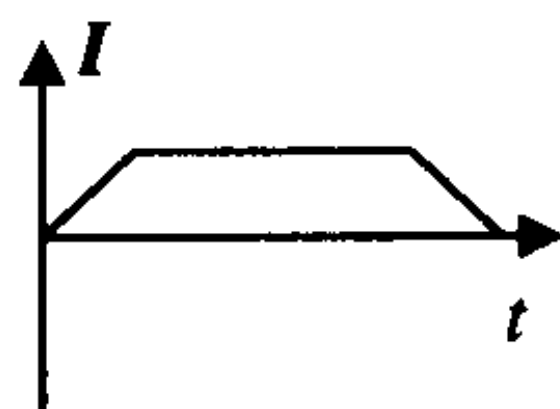
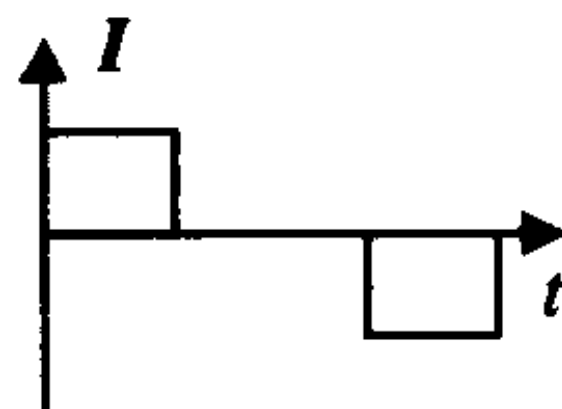


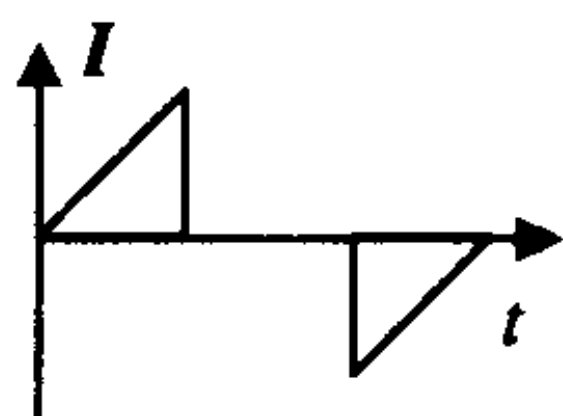
图 7-1



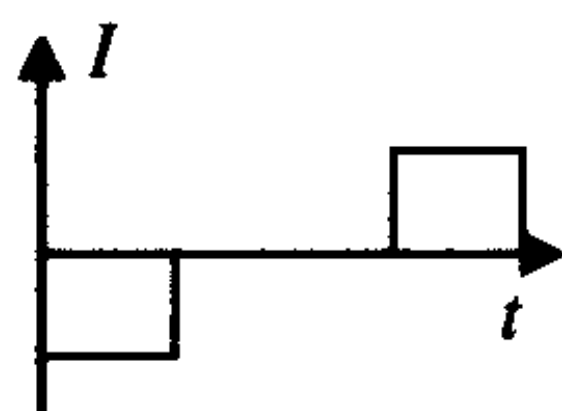
A



B



C



D

2. 将一根导线弯折成半径为 R 的 $3/4$ 圆弧 $abcd$, 置于均匀磁场 B 中, B 垂直于导线平面, 如图 7-2 所示。当导线沿角 aod 的角平分线方向以速度 v 向右运动时, 导线中产生的感应电动势 \mathcal{E}_i 为 ()。

A. 0

B. vRB

C. $\sqrt{2}vRB$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}vRB$

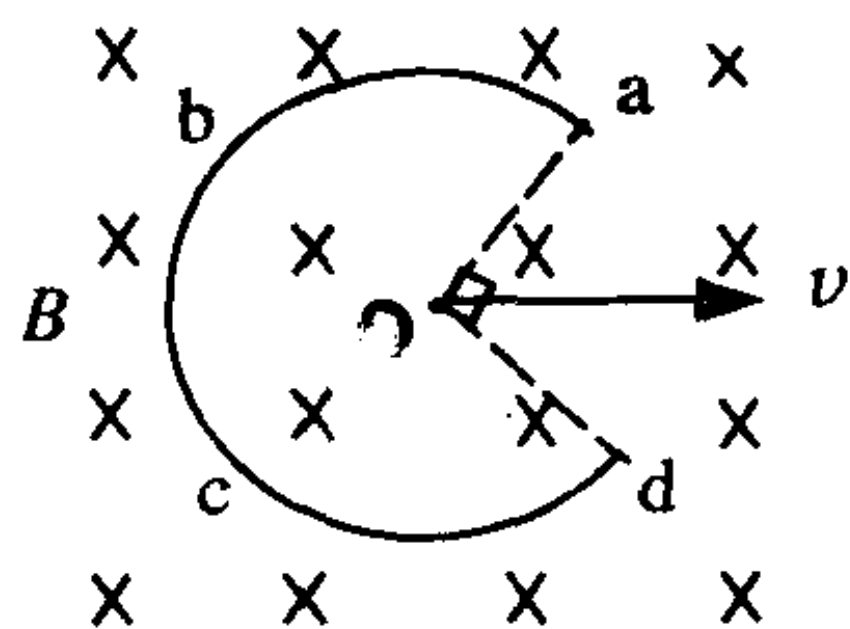


图 7-2

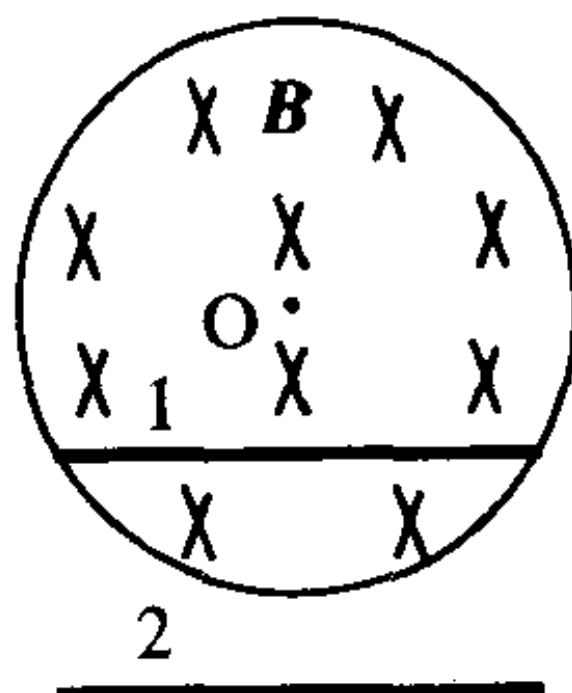


图 7-3

3. 在圆柱形空间内有一均匀磁场区,如图 7-3 所示,在磁场内外各放有一长度相同的金属棒(在图中位置 1,2 处),当磁场 B 的大小以速率 $\frac{dB}{dt}$ 均匀变化时,下列说法正确的是()。

- A. 1 处的棒相对磁场静止,故 $\mathcal{E}_1 = 0$
- B. 1 处的棒处在变化的磁场中,故 $\mathcal{E}_1 = 0$
- C. 2 处的棒处在磁场以外的空间,故 $\mathcal{E}_2 = 0$
- D. 2 处的棒虽处在 $B = 0$ 的空间,但 $E_{\text{感}} \neq 0$,故 $\mathcal{E}_2 \neq 0$

4. 一个电阻为 R ,自感系数为 L 的线圈,将它接在一个电动势为 $\mathcal{E}(t)$ 的交变电源上,线圈的自感电动势 $\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}$,则流过线圈的电流为()。

- A. $\frac{\mathcal{E}(t)}{R}$ B. $\frac{\mathcal{E}_L}{R}$ C. $\frac{\mathcal{E}(t) + \mathcal{E}_L}{R}$ D. $\frac{\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}_L}{R}$

5. 下列说法中正确的是()。

- A. 按照线圈自感系数的定义式 $L = \Phi/I$, I 越小, L 就越大
- B. 自感是对线圈而言的,对一个无线圈的导线回路是不存在自感的
- C. 位移电源只在平行板电容器中存在
- D. 位移电流的本质也是电荷的定向运动,当然也能激发磁场

E. 以上说法均不正确。

6. 两个相距不太远的平面圆线圈, 怎样放置可使其互感系数近似为零(设其中一线圈的轴线恰通过另一线圈的圆心)()。

A. 两线圈的轴线相互平行

B. 两线圈的轴线相互垂直

C. 两线圈的磁矩成反平行

D. 两线圈无论如何放置, 互感系数也不为零

7. 已知平行板电容器的电容为 C , 两极板间的电势差 U 随时间变化, 其间的位移电流为()。

A. $C \frac{dU}{dt}$

B. $\frac{dD}{dt}$

C. CU

D. 0

8. 在以下矢量场中, 属保守力场的是()。

A. 静电场

B. 涡流电场

C. 稳恒磁场

D. 变化磁场

选择题解答

1. [解] 本题的正确答案为(D)。

以导体框右边界刚进入磁场为计时起点。

① 导体框正在进入磁场的过程:

t 时刻导体框进入磁场的面积为

$$S = lx$$

如图 7-4 所示。通过的磁通量为

$$\Phi_m = BS = Blx > 0$$

则感应电动势为

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_m}{dt} = - Bl \frac{dx}{dt} = -$$

$Blv = -$ 恒量

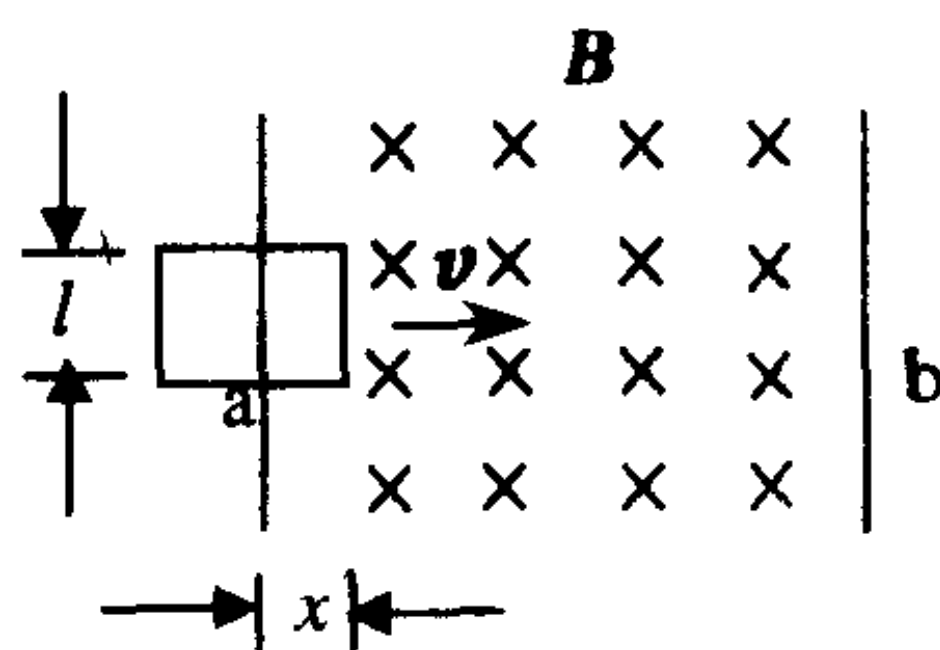


图 7-4

说明此过程导体框中电动势的方向为逆时针,而大小为一恒定值 Blv 。

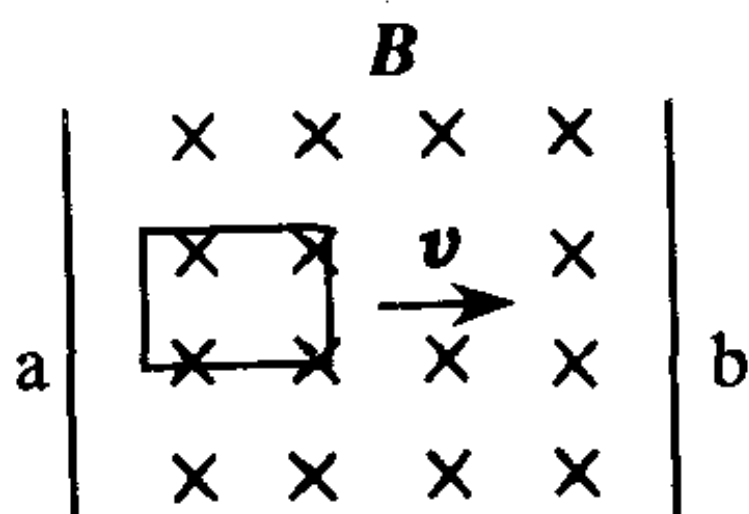


图 7-5

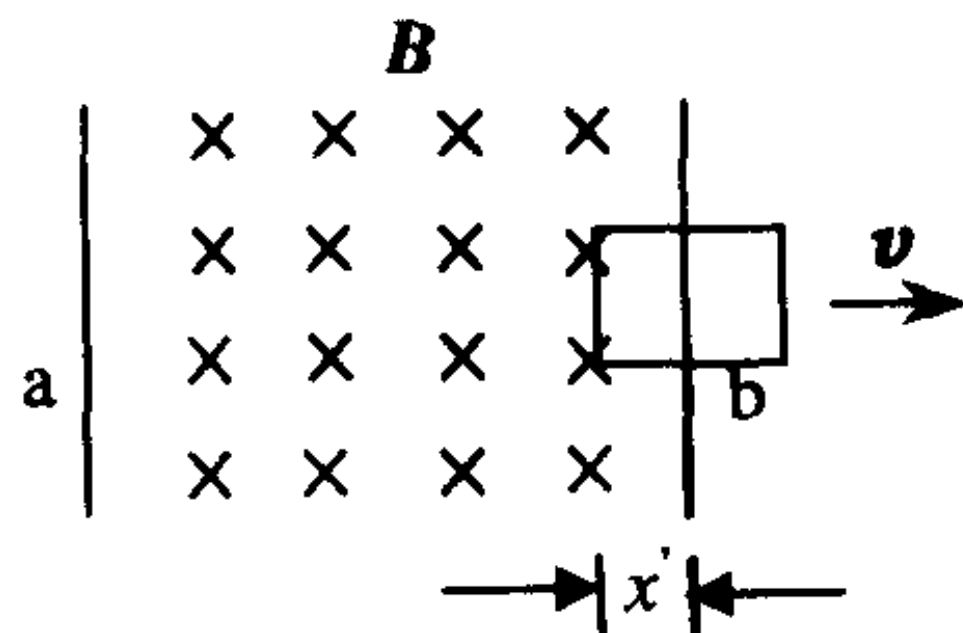


图 7-6

② 导体框已经全部进入磁场的过程:这一过程通过导体框的磁通量不变,故导体框中无感应电流。(如图 7-5 所示)。

③ 导体框从磁场中穿出的过程:这一过程通过导体框的磁通量随时间均匀减少,如图 7-6 所示。

$$\Phi_m = Blx'$$

$$\mathcal{E}_i = -Bl \frac{dx'}{dt} = Blv > 0$$

说明此过程导体框中的感应电流为顺时针方向,而大小为一恒定值 Blv 。

综上所述,正确描述导体框中感应电流随时间变化的曲线应为 D。

2. [解] 本题的正确答案为(C)。

将圆弧导线 abcd 的 a,d 端用一直导线连接,形成如图 7-7 所示的闭合回路。

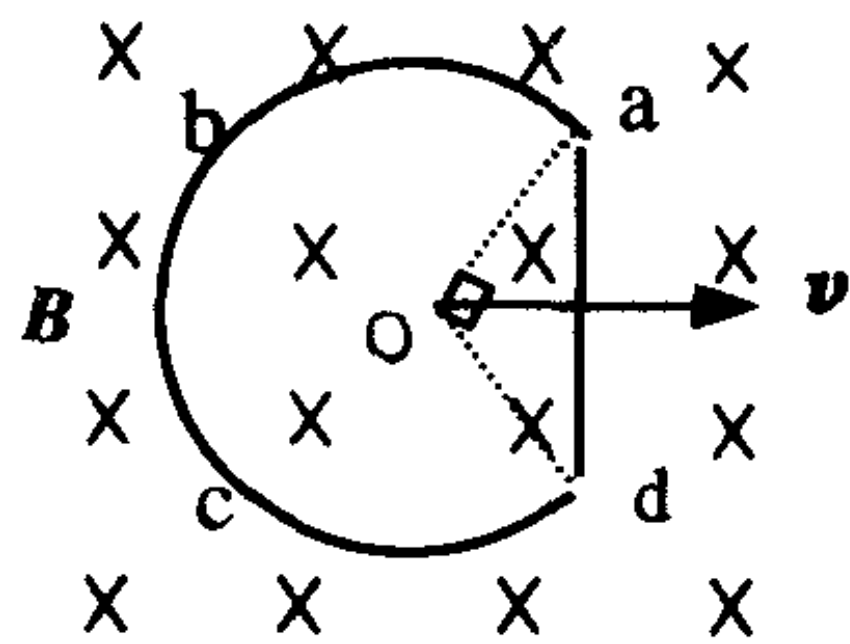


图 7-7

当回路整体以速度 v 向右运动时,通过回路的磁通量不变,由法拉第电磁感应定律知,回路中电动势之和为零。

又由动生电动势公式 $\mathcal{E}_i = \int_a^d (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ 分析可知, 圆弧形导线 abcd 上电动势不为零。

结合上面分析可知, 导线 abcd 中的电动势与直导线 ad 中的电动势必相等, 故

$$\mathcal{E}_{abcd} = \mathcal{E}_{ad} = vB \overline{ad} = \sqrt{2} vBR$$

3. [解] 本题的正确答案为 (B, D)。

如图 7-3 所示的变化磁场, 在空间产生感生电场, 感生电场线的分布是一圈一圈的同心圆, 如图 7-8 所示。

由电动势定义 $\mathcal{E} = \int \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}$ 分析可知:

① A 说法是错误的, 1 处的金属棒处在感生电场中, 且感生电场沿棒的分量不为零, 故 $\mathcal{E} \neq 0$ 。

② 同样 C 说法也是错误的, 2 处的金属棒虽处在磁场以外, 但该空间仍有感生电场分布, 且感生电场沿棒的分量不为零, 故 $\mathcal{E} \neq 0$ 。

4. [解] 本题的正确答案为 (C)。

由含源电路的全电路欧姆定律可知

$$\mathcal{E}(t) + \mathcal{E}_L = IR$$

故

$$I = \frac{\mathcal{E}(t) + \mathcal{E}_L}{R}$$

5. [解] 本题的正确答案为 (E)。

① 线圈的自感系数 L 是反映线圈电磁惯性大小的物理量, 它只和线圈本身的形状、大小、匝数、磁介质分布有关和线圈是否载流无关, 故 A 说法是错误的。其次, 从自感的定义式

$$L = \Phi/I$$

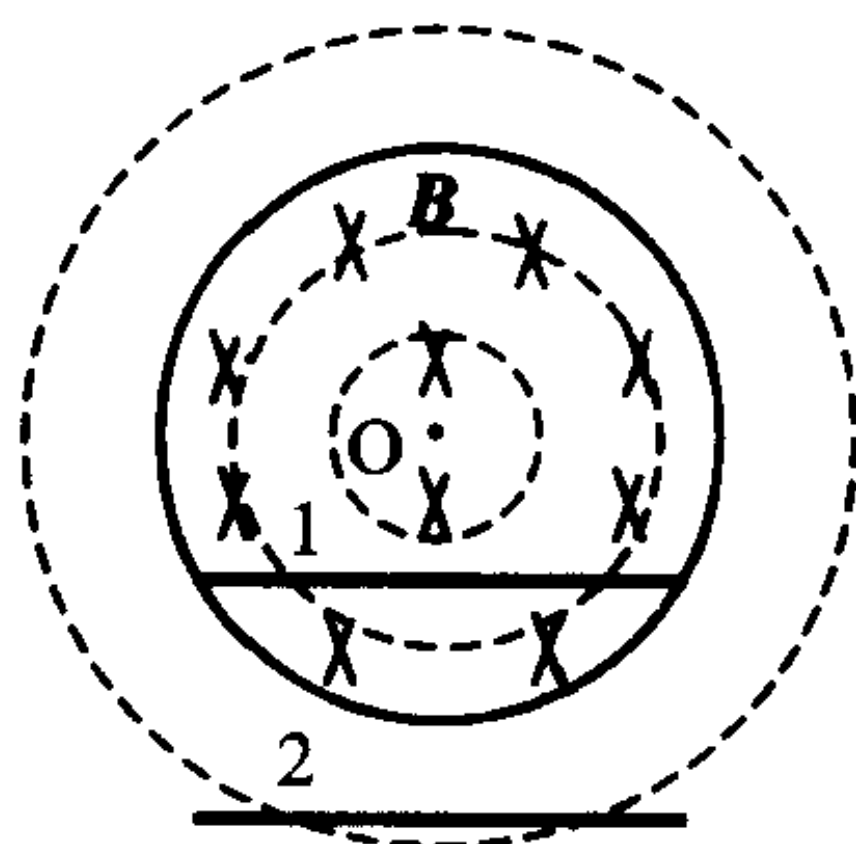


图 7-8

也可以看出这一点:线圈通有电流 I 时, Φ 与 I 成正比, 故 L 与 I 无关。

② 从自感的定义式 $L = \Phi/I$ 可知, Φ 是穿过一个“回路”的磁通量, 这个“回路”即可以指线圈回路, 也可以指一般的载流回路。因而, 并不是线圈才有自感, 非线圈回路也有自感, 只是与前者相比自感小得多。故 B 说法是错误的。

③ 位移电流实质上是指“变化的电场”, 因而, 它可存在于真空、介质、导体中, 而不仅仅存在于电容器中。故 C 说法是错误的。

④ 如上面所述, 位移电流的本质是变化的电场而非运动的电荷, 故 D 说法的前半句是错误的。但由麦克斯韦方程

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

可知, 变化的电场的确也能激发磁场。

因而, A, B, C, D 四种说法均是不正确或不完全正确的, 本题的正确答案是 E。

6. [解] 本题的正确答案为 (B)。

由互感电动势的定义 $M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$ 知, 当一个线圈产生的磁场通过另一个线圈的磁通量 $\Psi \approx 0$ 时, 其互感系数就近似为零, 故考虑到平面圆线圈载流时磁感应线的分布特征, 即可得正确答案。

7. [解] 本题的正确答案为 (A)。

对平行板电容器, 其间的电位移 $D = \frac{Q}{S}$ (S 是极板的面积), 当极板间的电势差随时间变化时, 极板上的荷电量也同样随时间变化, 其间的位移电流为

$$I_d = \frac{d}{dt} \Phi_D = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{dD}{dt} S = \frac{dQ}{dt}$$

由 $C = \frac{Q}{U}$ 关系可知, $I_d = C \frac{dU}{dt}$ 。

8. [解] 本题的正确答案为 A。

一个场若为保守场,其场的环路积分应为零,不妨写出几个场的环路积分:

$$\oint_L \mathbf{E}_{\text{静}} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad \oint_L \mathbf{E}_{\text{感}} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_L \mathbf{H}_{\text{恒}} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0, \quad \oint_L \mathbf{H}_{\text{感}} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

可见,只有静电场是保守场。

二、填空题

1. 一金属棒 ab 长为 L , 沿 OO' 轴在水平面内旋转, 外磁场方向与轴平行, 如图 7-9 所示, 已知 $\overline{bc} = 2\overline{ac}$ 则金属棒 ab 两端的电位 U_a $\underline{\hspace{1cm}}$ U_b 。

2. 产生动生电动势的非静电力是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 其相应的非静电性电场强度 $E_s = \underline{\hspace{2cm}}$; 产生感生电动势的非静电力是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 激发感生电场的场源是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

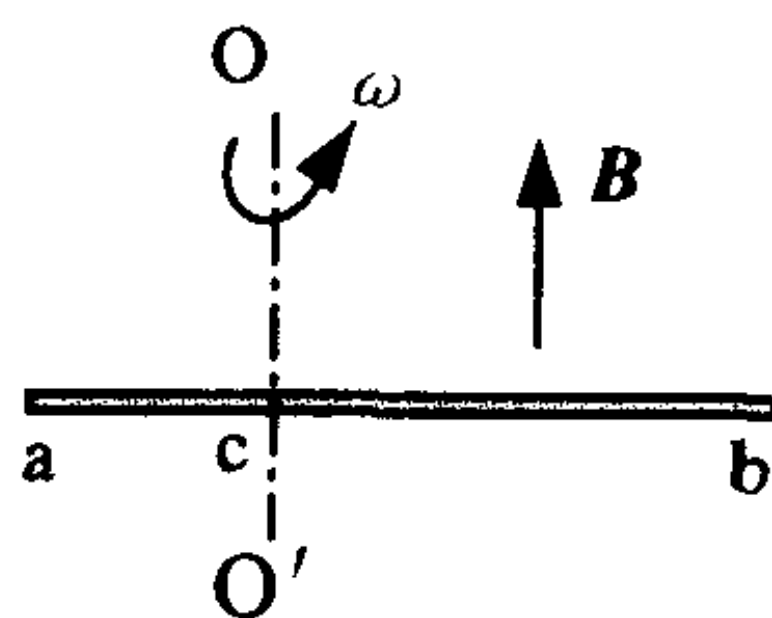


图 7-9

3. 一半径为 r_0 、电阻为 R 的圆线圈, 处于载有变化电流的长直螺线管的中部, 如图 7-10 所示。螺线管的截面积为 S , 若圆线圈回路中有一稳定的感应电流 i , 则长直螺线管内磁场随时间的变化率为 $|\frac{dB}{dt}| = \underline{\hspace{2cm}}$ (忽略圆线圈感应电流 i 产生的磁场)。

4. 如图 7-11 所示, 在匀强磁场中, 有一长为 L 的导体杆 AC 绕竖直轴 AO 以匀速 ω 转动, 已知 AC 与 AO 的夹角为 θ , 则 AC 中的感应电动

\mathcal{E}_i $\underline{\hspace{2cm}}$; 方向 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

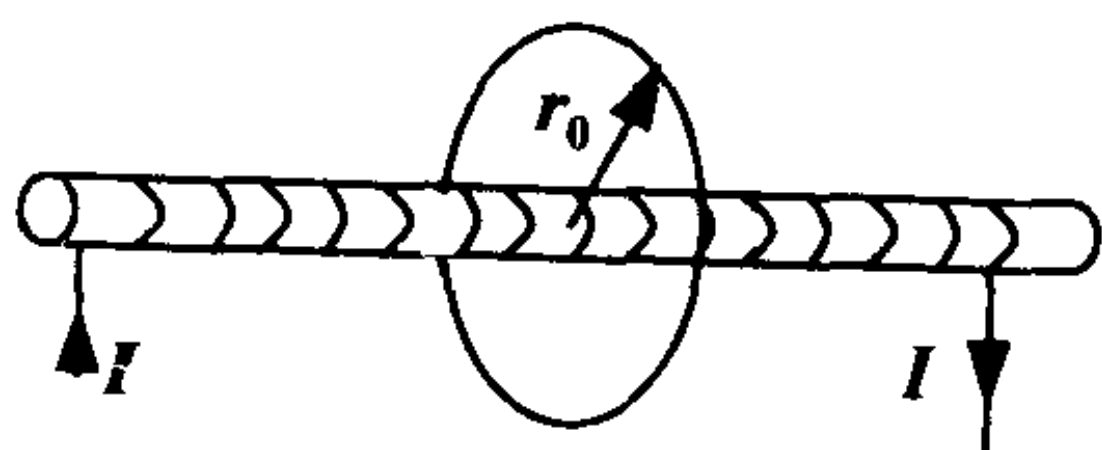


图 7-10

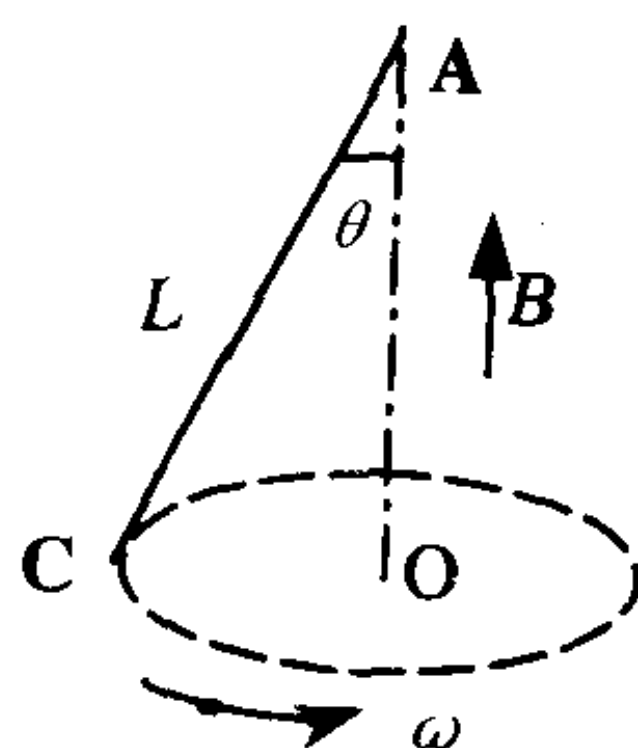


图 7-11

5. 在圆柱形区域内有一均匀磁场 B , 且 $\frac{dB}{dt} > 0$ 。一边长为 l 的正方形金属框置于磁场中, 位置如图 7-12 所示, 框平面与圆柱形轴线垂直, 且轴线通过金属框 ab 边的中点 O , 则

$\mathcal{E}_{ab} =$ _____; $\mathcal{E}_{dc} =$ _____; $\mathcal{E}_{abcda} =$ _____。

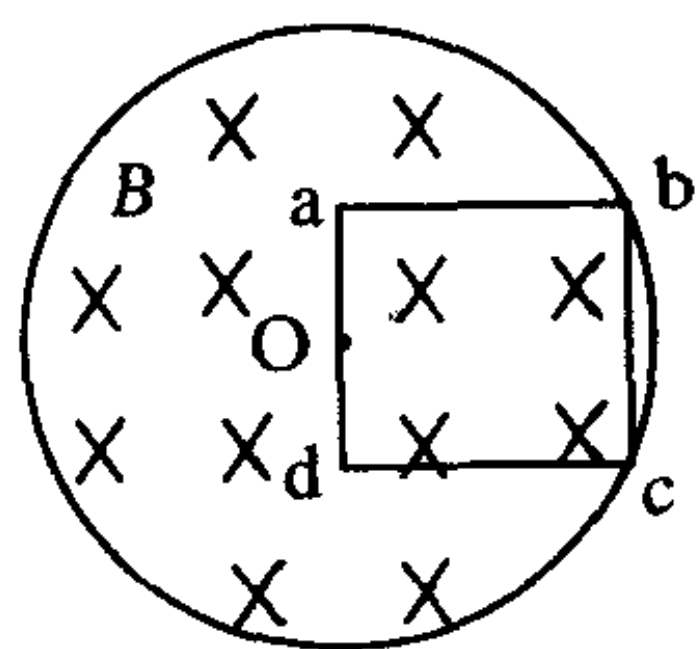


图 7-12

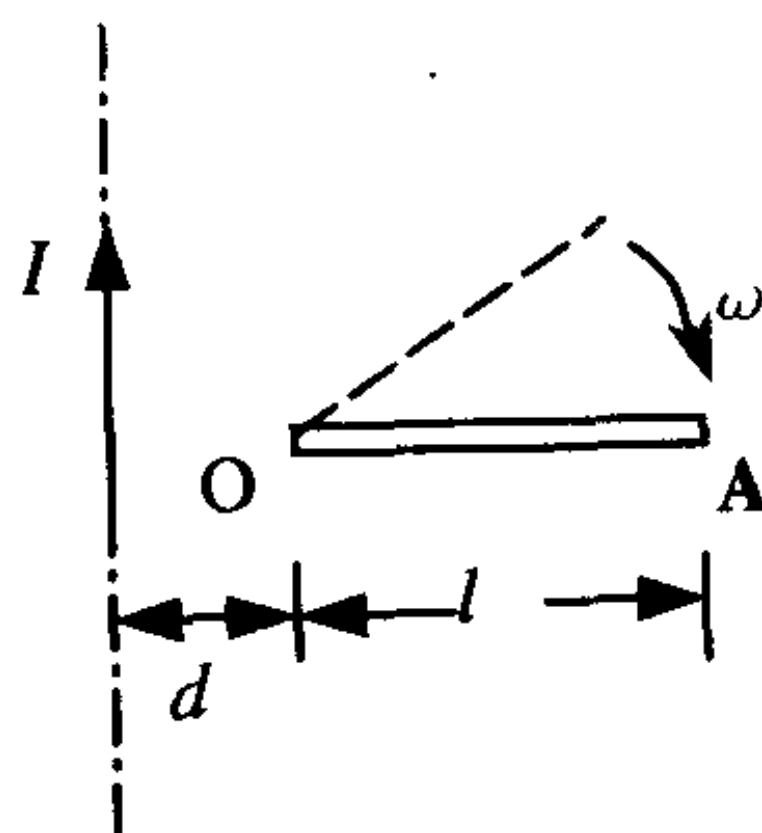


图 7-13

6. 长为 l 的导体棒与通有电流 I 的长直载流导线共面, 导体棒可绕通过 O 点、垂直于纸面的轴以角速度 ω 作顺时针转动, 当棒转到与直导线垂直的位置 OA 时, 如图 7-13 所示。导体棒中的感应电动势为 $\mathcal{E}_i =$ _____。其方向为由 _____ 点指向 _____ 点。

7. 真空中两只长直螺线管 1 和 2 长度相等, 均属单层密绕, 且匝数相同, 两管直径之比 $D_1/D_2 = \frac{1}{4}$ 。当两者都通以相同电流时,

所贮存的磁能比为 $W_{m1}/W_{m2} =$ _____。

8. 实验室中一般可获得的强磁场约为 2.0T , 强电场约为 $1 \times 10^6\text{V/m}$ 。则相应的磁场能量密度 $w_m =$ _____, 电场能量密度 $w_e =$ _____。哪种场更有利于储存能量? 是 _____。

9. 试相应地写出哪一个麦克斯韦方程相当于或包括下列事实。

① 一个变化的电场, 必定有一个磁场伴随它。方程是 _____;

② 一个变化的磁场, 必定有一个电场伴随它。方程是 _____;

③ 不存在磁单极子。方程是 _____;

④ 在静电平衡条件下, 导体内部不可能有电荷分布。方程是 _____。

填空题解答

1. [解] 如图 7-14 所示建立坐标系。在金属棒上选择一段长为 dx 的线元, 其上的动生电动势为

$$d\mathcal{E} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = x\omega B dx$$

整个金属棒上的电动势为

$$\mathcal{E} = \int_{-\frac{1}{3}L}^{\frac{2}{3}L} \omega B x dx =$$

$$\frac{1}{2} \omega B \left(\frac{4}{9} L^2 - \frac{1}{9} L^2 \right) =$$

$$\frac{1}{6} \omega B L^2$$

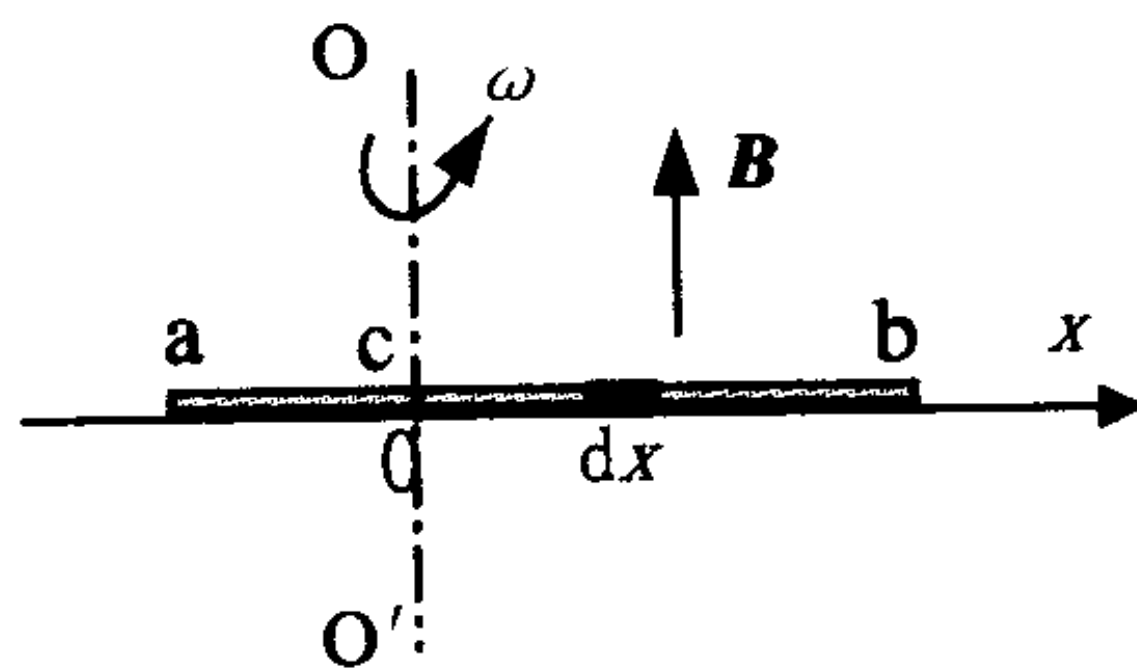


图 7-14

电动势的方向由 a 指向 b, 在金属棒的 a 端将积累负电荷而 a 端积累正电荷。因此, b 端电位高于 a 端。

2. [解] 产生动生电动势的非静电力是洛伦兹力, 其相应的非静电性电场强度 $E_k = v \times B$; 产生感生电动势的非静电力是感生电场力; 激发感生电场的场源是变化的磁场。

3. [解] 圆线圈中的感应电流是由长直螺线管内变化的磁场感应的。t 时刻, 通过圆线圈的磁通量为 $\Phi_m = BS$ (B 为长直螺线管内均匀磁场的磁感应强度)。由电磁感应定律知圆线圈中的感应电动势为

$$\mathcal{E} = \left| \frac{d\Phi_m}{dt} \right| = S \left| \frac{dB}{dt} \right|$$

感应电流为
$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{S}{R} \left| \frac{dB}{dt} \right|$$

由此可得
$$\left| \frac{dB}{dt} \right| = \frac{iR}{S}$$

4. [解] 在导体杆的中段任选一小段线元 dl , 如图 7-15 所示。其上的动生电动势为

$$d\mathcal{E}_i = (v \times B) \cdot dl = vB \sin \theta dl$$

其中 $v \times B$ 的方向如图所示。导体杆上总的感应电动势为

$$\mathcal{E}_i = \int_A^C vB \sin \theta dl = \int_0^L l \omega B \sin \theta dl = \frac{1}{2} L^2 \omega B \sin \theta$$

电动势的方向由 A 指向 C。

5. [解] 变化的磁场在圆柱形区域内外的电场分布如图 7-16 所示。根据电动势的定义式 $\mathcal{E} = \int E_k \cdot dl$, 金属框 ad 边的电动势

$$\mathcal{E}_{ad} = \int_a^d E \cdot dl = 0 \quad (\text{其中 } E \perp dl)$$

如图所示作一条辅助线 oc, 同理可知

$$\mathcal{E}_{ad} = \mathcal{E}_{oc} = \int_0^c E \cdot dl = 0$$

对三角形回路 ocdo 运用电磁感应定律可得

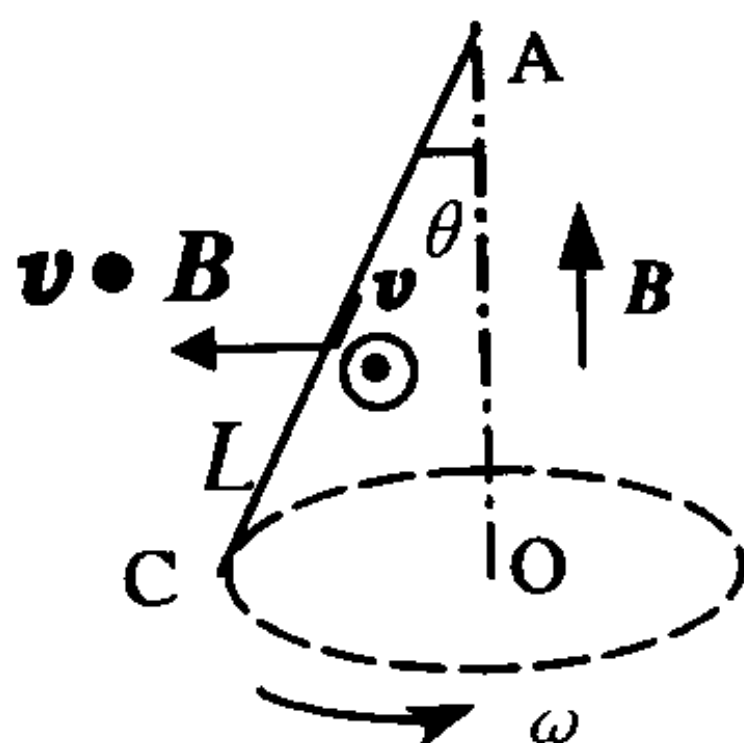


图 7-15

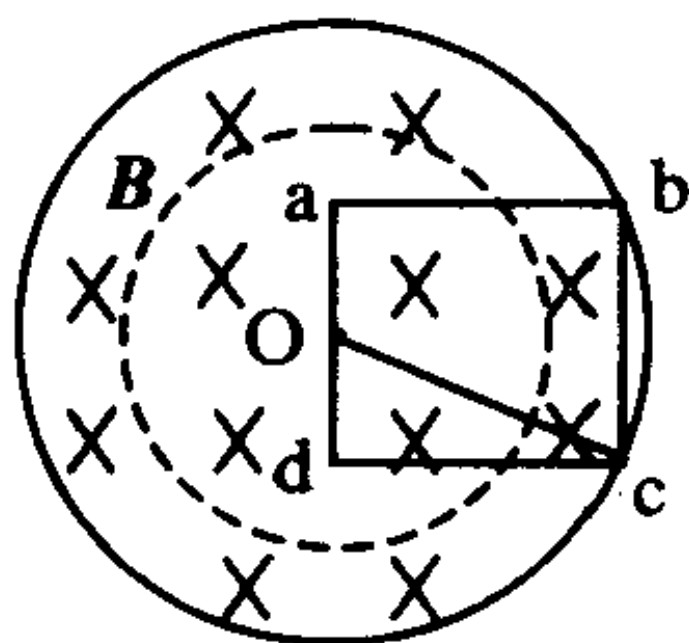


图 7-16

$$\mathcal{E}_{\Delta 1} = - \frac{d\Phi_m}{dt} = - S_{\Delta 1} \frac{dB}{dt} = - \frac{l^2}{4} \frac{dB}{dt}$$

而 $\mathcal{E}_{\Delta 1} = \mathcal{E}_{oc} + \mathcal{E}_{cd} + \mathcal{E}_{do}$, 其中 $\mathcal{E}_{oc} = \mathcal{E}_{do} = 0$

$$\text{故 } \mathcal{E}_{cd} = - \frac{l^2}{4} \frac{dB}{dt}, \text{ 那么 } \mathcal{E}_{dc} = \frac{l^2}{4} \frac{dB}{dt}$$

对正方形回路 abcd 同样可得

$$\mathcal{E}_{abcd} = - \frac{d\Phi_m}{dt} = - S_{abcd} \frac{dB}{dt} = - l^2 \frac{dB}{dt}$$

6. [解] 如图 7-17 所示建立坐标系。导体棒上 dl 处一小段中的动生电动势为

$$d\mathcal{E}_i = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = r\omega B dr$$

直导线在 dl 处产生的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(r+d)}$$

方向向里。

导体棒上的总电动势为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= \int_0^l \omega \frac{\mu_0 I r}{2\pi(r+d)} dr = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \omega \left(l - d \ln \frac{d+l}{d} \right) \end{aligned}$$

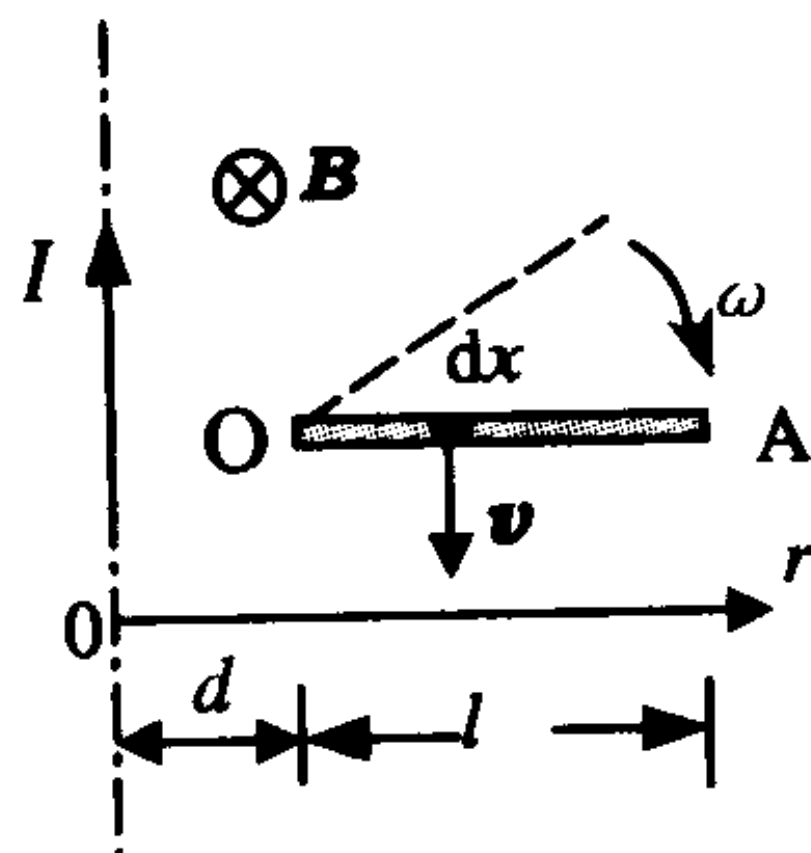


图 7-17

其方向由 O 指向 A 。

7. [解] 一个自感系数为 L , 载有电流 I 的线圈贮存的磁能为

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

一个长直螺线管的自感系数为

$$L = \frac{\Psi}{I} = \mu \frac{N^2}{l} S = \mu \frac{N^2}{l} \frac{\pi D^2}{4}$$

其中 l 是螺线管的长度, N 是匝数。

两个线圈的储能比为

$$W_{m1}/W_{m2} = D_1^2/D_2^2 = \frac{1}{16}$$

8. [解] 已知 $B_m = 2.0\text{T}$, $E_m = 1 \times 10^6 \text{ V/m}$ 。

相应的磁能密度为

$$\begin{aligned} w_m &= \frac{1}{2}HB = \frac{1}{2} \frac{B_m^2}{\mu_0} = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2^2}{4 \times 3.14 \times 10^{-7}} = 1.6 \times 10^6 \text{ J/m}^3 \end{aligned}$$

相应的电场能量密度为

$$\begin{aligned} w_e &= \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_m^2 = \\ &= \frac{1}{2} \times 8.85 \times 10^{-12} \times 10^{12} = 4.425 \text{ J/m}^3 \end{aligned}$$

显然, 磁场更容易储存能量。

9. [解] ① 方程 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ 说明在空间变化的电场激发磁场。

② 方程 $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$ 说明在空间变化的磁场也会激发电场。

③ 方程 $\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 说明磁场是无“源”场, 磁感应线是闭合的, 故不存在磁单极子。

④ 在静电场中, $\oiint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \sum q_0$, 由于导体达到静电平衡时, 其内部各点处 $\boldsymbol{E} = 0$ ($\boldsymbol{D} = 0$), 故上式用于导体中, $\sum q = 0$, 即导体内不可能有电荷分布。

三、问答题

1. 涡旋电场与静电场有哪些区别?

[答](1) 起源不同: 静电场由静止电荷激发; 而涡旋电场则起源于变化的磁场。

(2) 性质不同: 静电场是有源无旋场(电场线不闭合, 有头有尾), 从而静电场是保守力场(势场); 涡旋电场是无源有旋场(电场线闭合, 无头无尾), 从而涡旋电场是非保守场(无势场)。

2. 位移电流与传导电流有哪些区别?

[答](1) 传导电流起源于自由电荷的定向运动; 而位移电流不涉及电荷运动, 本质上就是变化的电场。

(2) 传导电流通过导体时要产生焦耳热, 而位移电流则无热效应。

(3) $I_{\text{传}}$ 只能在导体中存在, 而 $I_{\text{位}}$ 可以在导体、电介质甚至真空中存在。

四、计算题

1. 如图 7-18 所示, 矩形导体框架置于通有电流 I 的长直载流导线旁, 且两者共面, ad 边与直导线平行, dc 段可沿框架平动, 设导体框架的总电阻 R 始终保持不变。现 dc 段以速度 v 沿框架向下作匀速运动, 试求:

① 当 cd 段运动到图示位置(与 ab 相距 x) 时, 穿过 $abcd$ 回路的磁通量 Φ_m ;

② 回路中的感应电流 I_i ;

③ cd 段所受长直载流导线的作用力 F 。

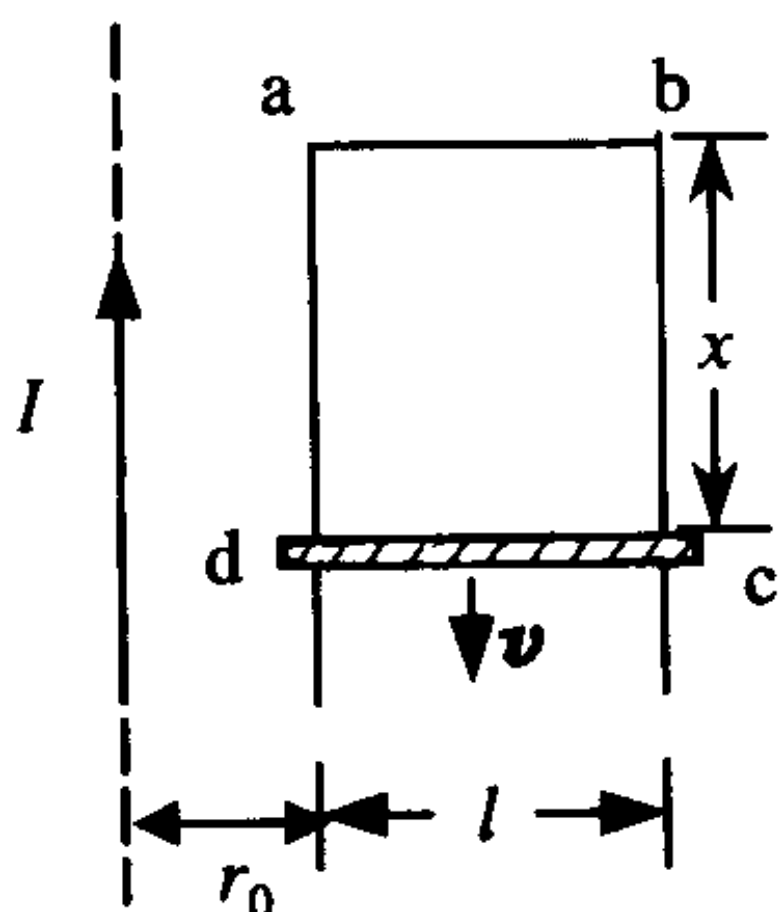


图 7-18

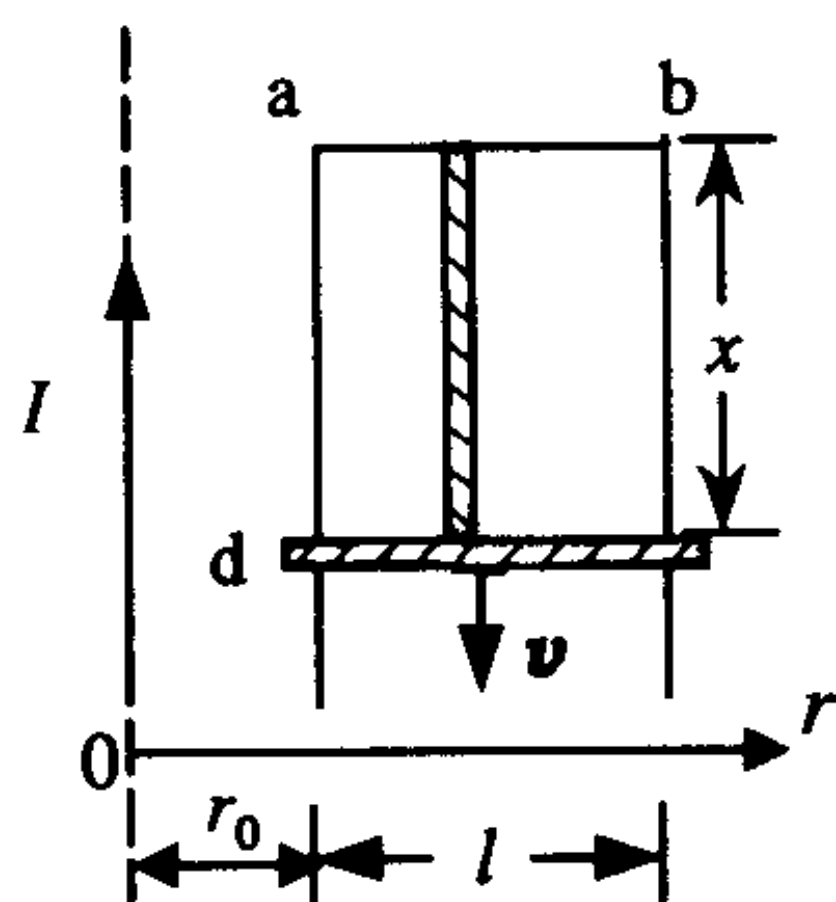


图 7-19

[解] ① 长直载流导线在空间的磁场分布为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

取 abcd 回路的面法线方向垂直纸面向里, 在距长直导线为 r 处取一面积元 $dS = xdr$, 如图 7-19 所示。穿过此面元的磁通量为

$$d\Phi_m = B \cdot dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} xdr$$

穿过整个回路的磁通量为

$$\Phi_m = \frac{\mu_0 I x}{2\pi} \int_{r_0}^{r_0+l} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I x}{2\pi} \ln \frac{r_0 + l}{r_0}$$

② 由法拉第电磁感应定律知, 回路上的电动势为

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_m}{dt} = - \frac{\mu_0 I}{2\pi} v \ln \frac{r_0 + l}{r_0}$$

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = - \frac{\mu_0 I v}{2\pi R} \ln \frac{r_0 + l}{r_0}$$

方向为逆时针方向。

此电动势是由于 cd 段导线在磁场中运动产生的。因此, 也可以由动生电动势公式 $d\mathcal{E}_i = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ 求出 \mathcal{E}_i 。

③ 由安培定律 $dF = Idl \times B$ 可求出 cd 段导线的受力

$$dF = I_i B dr = \frac{\mu_0 I v}{2\pi R} \ln \frac{r_0 + l}{r_0} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr$$

$$F = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\right)^2 \frac{v}{R} \ln \frac{r_0 + l}{r_0} \int_{r_0}^{r_0+l} \frac{dr}{r} = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_0 + l}{r_0}\right)^2 \frac{v}{R}$$

方向垂直于 cd 导线向上。

2. 如图 7-20 所示, 均匀磁场 B 中有一矩形导体框架, B 与框架平面的正法线方向 n 之间的夹角 $\theta = \pi/3$, 框架的 ab 段长为 l , 可沿框架以速度 v 向右匀速运动。已知 $B = kt$, k 为常数, 当 $t = 0$ 时, $x = 0$ 。试求: 当直导线 ab 运动到与 cd 边相距 x 时, 框架回路中的感应电势 \mathcal{E}_i 为多少?

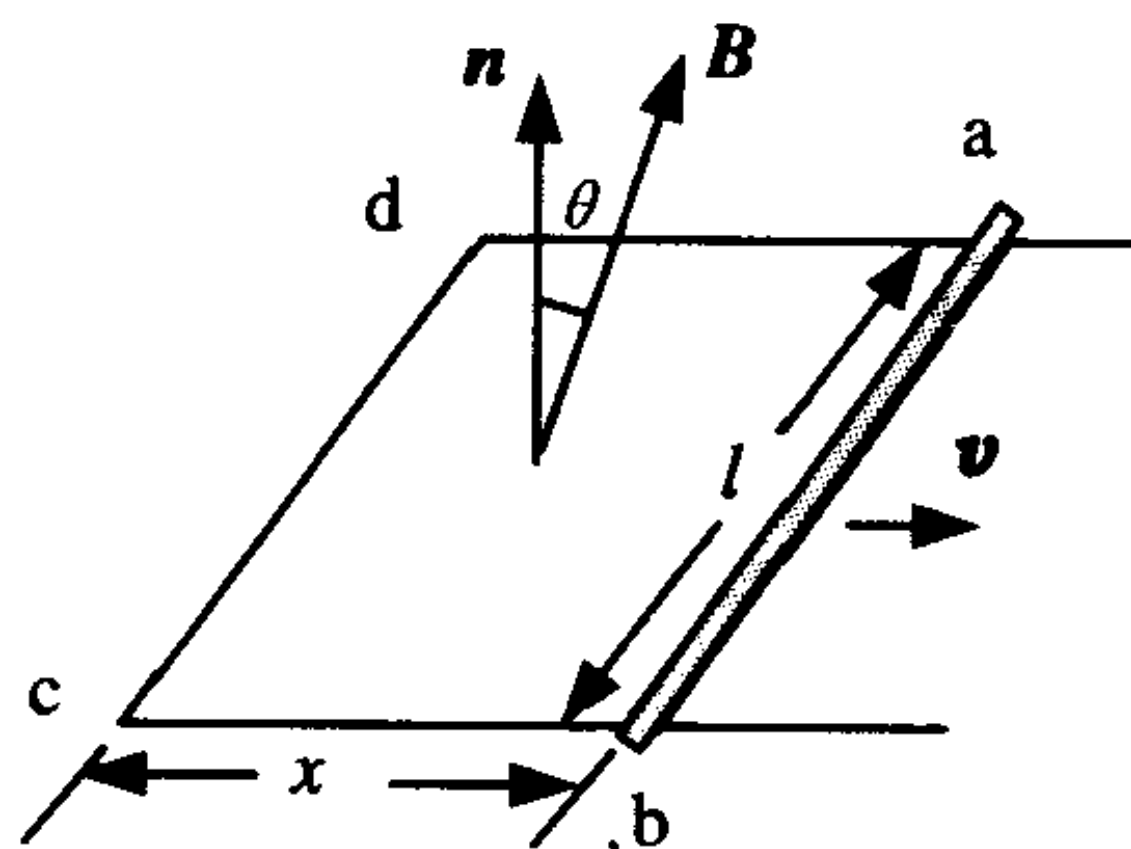


图 7-20

[解] t 时刻, 通过框架回路面积的磁通量为

$$\Phi_m = BS \cos \theta = kvlt^2 \cos \theta$$

回路的感应电动势为

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &= \mathcal{E}_{\text{动生}} + \mathcal{E}_{\text{感生}} = - \frac{d\Phi_m}{dt} = - kvl \cos \theta \frac{d}{dt} t^2 = \\ &= - 2kvtl \cos \frac{\pi}{3} = - klx \end{aligned}$$

负号说明电动势的方向为顺时针。

3. 一无限长直导线通有电流 $I = I_0 e^{-\lambda x}$ (式中 I_0, λ 为恒量), 和直导线在一平面内有一矩形线框, 其边长与直导线平行, 线框的尺寸及位置如图 7-21 所示, 且 $b/c = 3$ 。试求:

- ① 直导线和线框间的互感系数;
- ② 线框中的互感电动势。

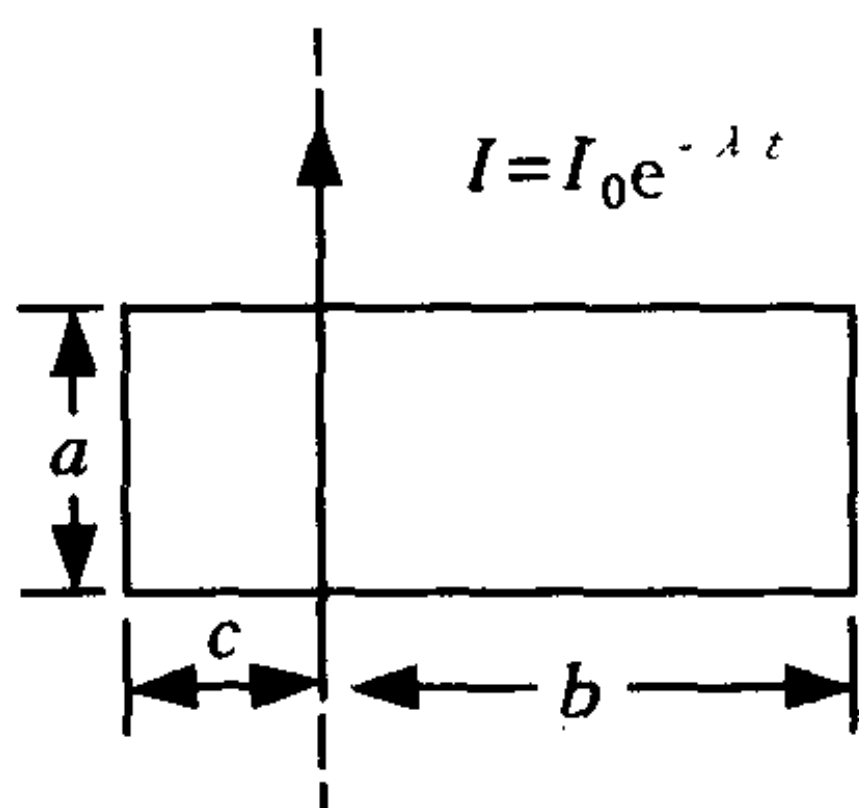


图 7-21

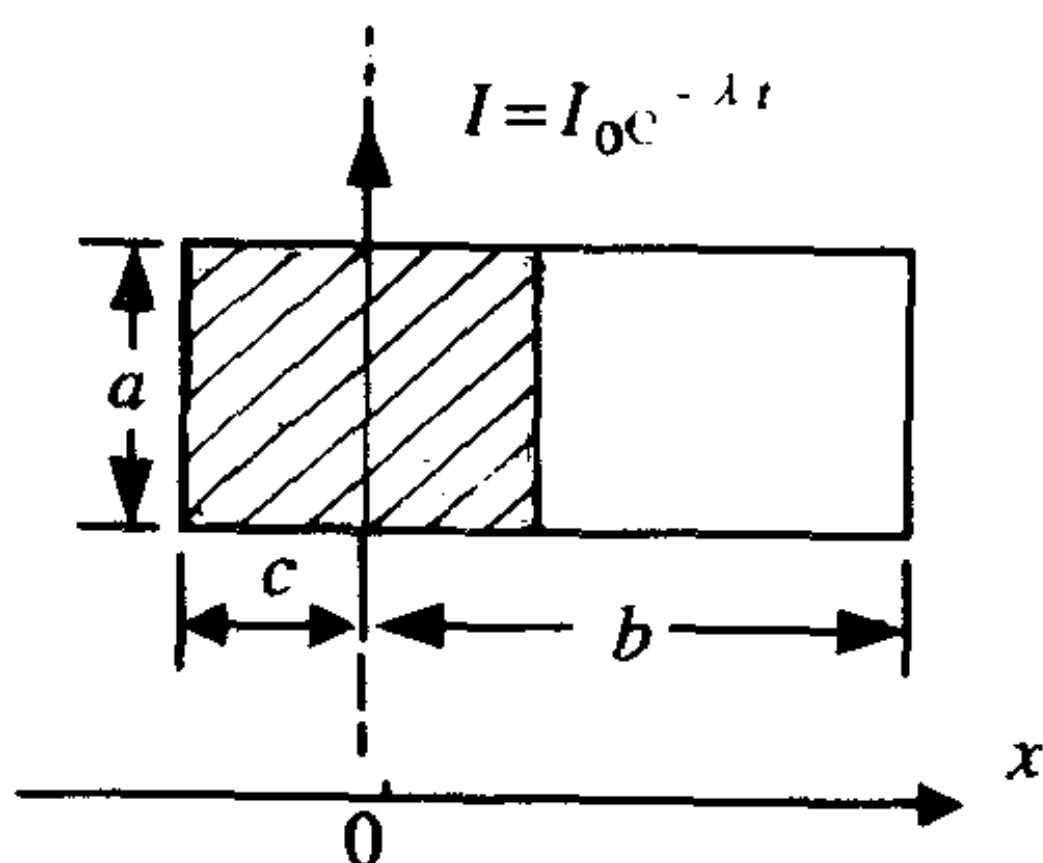


图 7-22

[解] ① 选顺时针方向为线框回路的正绕向。由磁场的分布及方向可知,在如图 7-22 两块阴影部分面积上的磁通量相互抵消,故穿过线框的磁通量为

$$\Phi_m = \int B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \int_c^b \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} a \ln 3$$

互感系数 $M = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln 3$

② 由电磁感应定律可知,线框中的互感电动势为

$$\mathcal{E}_m = -M \frac{dI}{dt} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \lambda I_0 e^{-\lambda t} \ln 3$$

$\mathcal{E}_m > 0$,说明互感电动势为顺时针方向。

4. 由两个无限长同轴薄圆筒导体组成的同轴电缆,其间充满磁导率为 μ 的磁介质,流过两圆筒的电流 $I_1 = I_2 = I$,流向相反,半径分别为 R_1, R_2 。试求:

① 长为 l 的一段电缆内的磁能;

② 长为 l 的一段电缆的自感系数。

[解] ① 由安培环路定理分析可知,磁场仅存在于两圆筒之间,磁场的分布为

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

② 取一长为 l , 半径为 r , 厚度为 dr 的圆薄筒状体积元

$$dV = 2\pi l r dr$$

磁场在体积元 dV 中的能量密度为

$$w_m = \frac{1}{2} BH = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$$

dV 中的磁场能量为

$$dW_m = w_m dV = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2} \times 2\pi l r dr = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r}$$

长为 l 的一段电缆内的磁能为

$$W_m = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

此题也可先求出自感系数 L , 再由 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ 式求之。

② 取面积元 $dS = l dr$

$$d\Phi_m = B dS = \frac{\mu I l}{2\pi} \frac{dr}{r}$$

磁通量

$$\Phi_m = \frac{\mu I l}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

长为 l 的一段电缆的自感系数

$$L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

此题在已求出磁能的情况下, 可由 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$ 式求出 L 。

五、附加题

1. 在半径为 R 的圆柱形区域内, 存在均匀电场 E , 且 $\frac{dE}{dt}$ 为负的恒量, 如图 7-23 所示。试求:

① 位移电流 I_d ;

② 在 $r < R$ 处, 位移电流激发的磁场 B 。

[解] ① 如图 7-24 所示, 作一半径为 r 的环路, 并取顺时针

方向为正,穿过该环路的电位移通量为

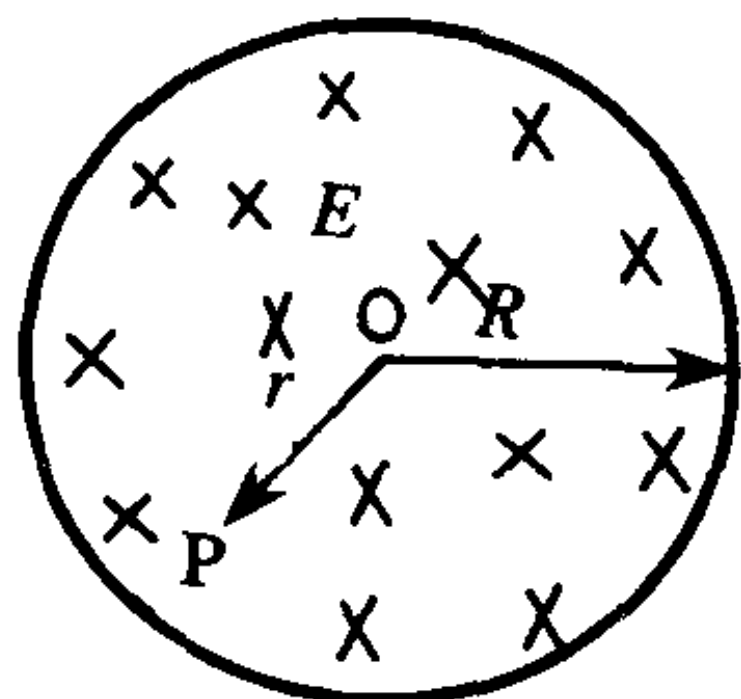


图 7-23

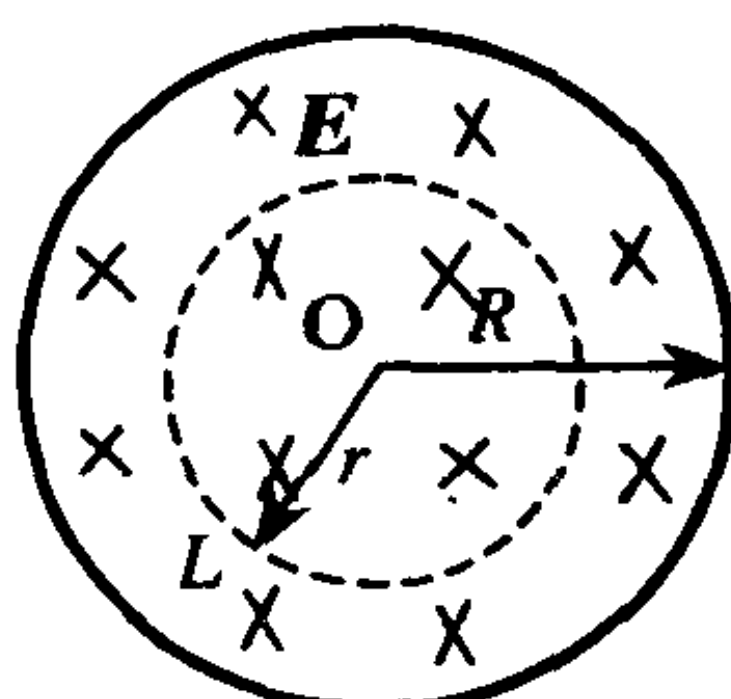


图 7-24

$$\Phi_D = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = DS = \epsilon_0 E \pi r^2$$

当 $r = R$ 时,得到穿过整个圆柱形区域的总电位移通量。位移电流为

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \epsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt}, \quad j_d = \epsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

② 根据非稳恒场的安培环路定律

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_d = j_d S$$

由电场的分布特征可知,如图 7-24 环路上各点的磁场强度是均匀分布的,故有

$$H 2\pi r = j_d S = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \pi r^2$$

可得
$$H = \frac{\epsilon_0}{2} r \frac{dE}{dt}, \quad B = \mu_0 H$$

则
$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2} r \frac{dE}{dt}$$

磁感应强度的方向为顺时针方向。

2. 磁浮悬装置原理图如图 7-25 所示,当给大螺线管通上高频电流时,可以使处于其中心的小金属块悬浮起来并被加热熔化,

从而可以模拟空间微重力无容器环境。为了使螺线管在高频电流下不致于也被熔化,通常将构成螺线管的粗导线做成空心状,并在内部通上循环水来冷却螺线管。请用电磁感应原理说明在高频电流下这样做并不会使空心螺线管比实心的电阻大。

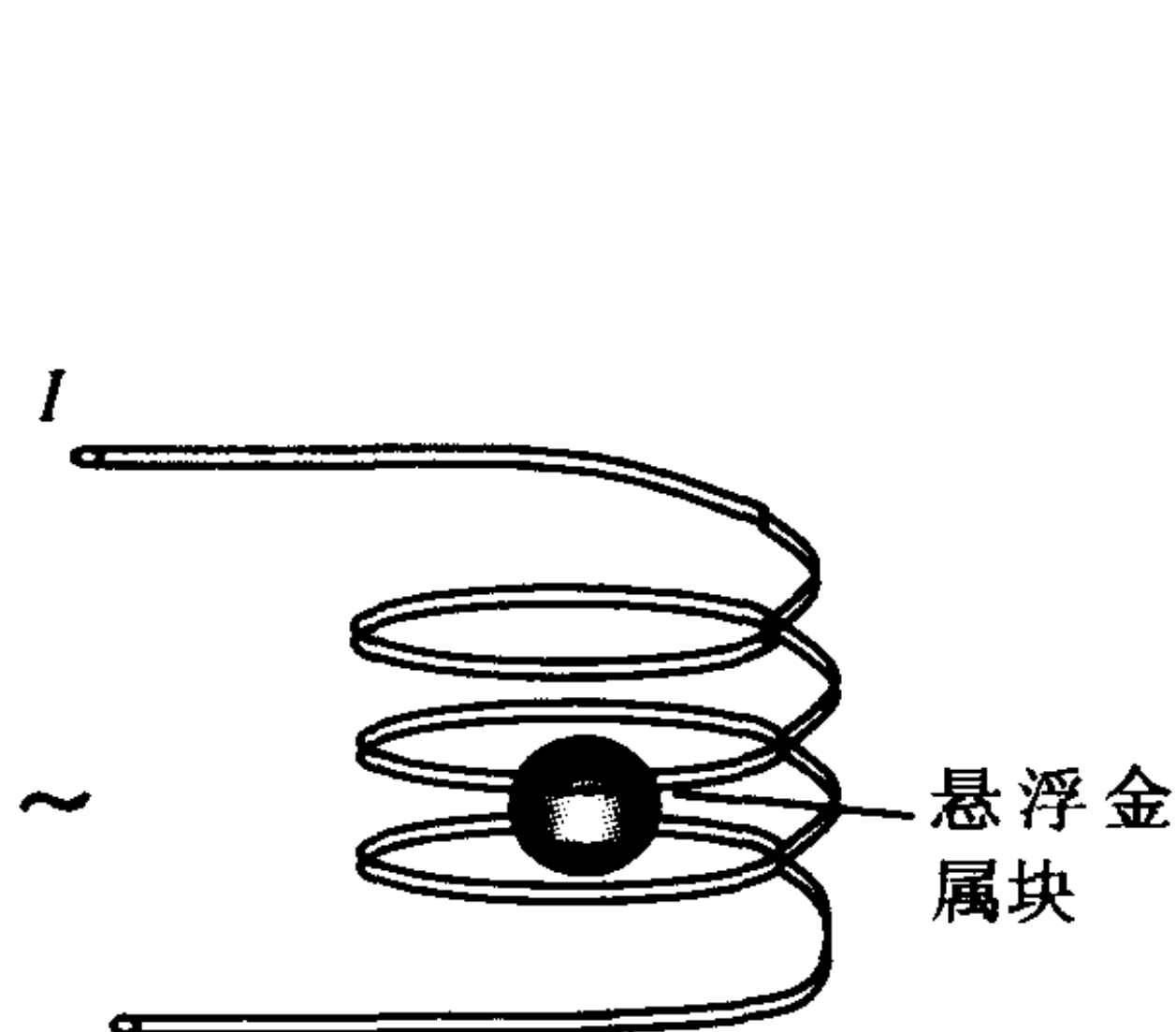


图 7-25

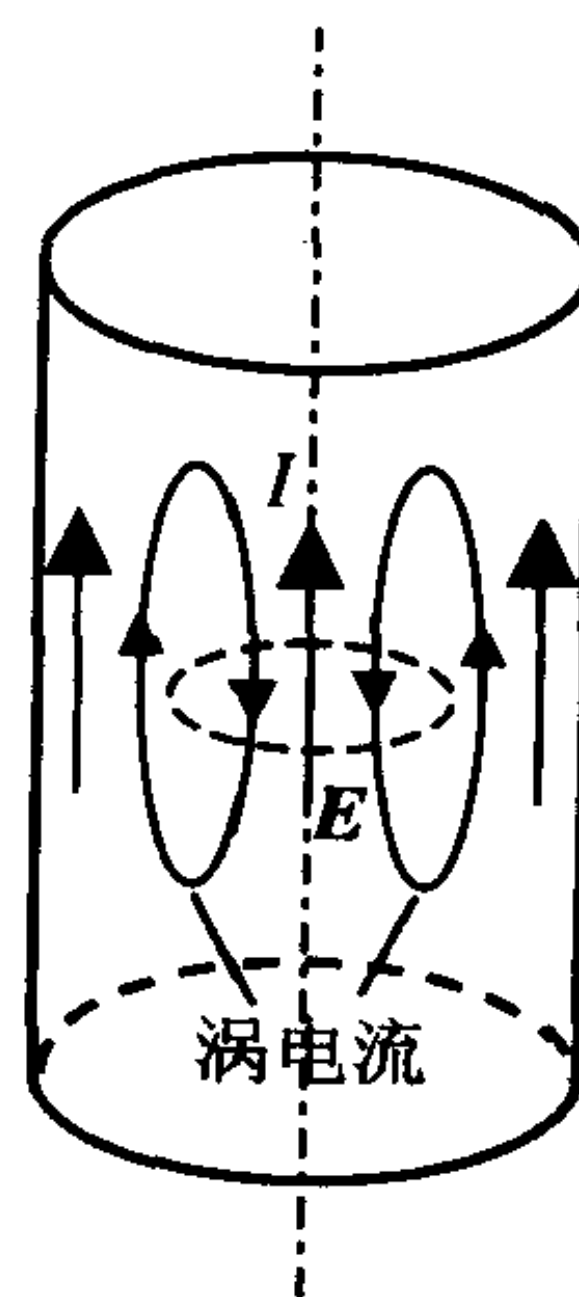


图 7-26

[答] 从螺线管上截取一段粗导线来加以分析。如图所示,当粗导线中通有高频交变电流时,交变电流在导体中产生变化的涡旋磁场(磁感应线如图7-26中虚线所示)。变化的磁场又会在导体中产生一圈圈对称分布的涡旋电场,如图7-26中实线所示,从而在导体中形成涡电流。这些涡电流在导体的中心部位,其方向与原高频电流方向相反;而在导体的边缘部位,其方向与高频电流方向相同。涡电流与高频电流迭加的结果将使得电流只分布在导体表面的一个薄层内,而导体的中心部位则无电流分布。这种在高频电流下产生的电流趋向于表面分布的现象有一个专有的名称,叫趋肤效应。由于趋肤效应,在高频电流的情况下,将导体做成空心状和实心状对载流情况完全相同。

第 8 章 气体动理论

一、选择题

1. 两个体积不等的容器, 分别储有氮气和氧气, 若它们的压强相同, 温度相同, 则下列各量中相同的是()。

- A. 单位体积中的分子数
- B. 单位体积中的气体内能
- C. 单位体积中的气体质量
- D. 容器中的分子总数

2. 两个体积相等的容器中, 分别储有氮气和氢气, 以 E_1 和 E_2 分别表示氮气和氢气的内能, 若它们的压强相同, 则()。

- A. $E_1 = E_2$ 。
- B. $E_1 > E_2$
- C. $E_1 < E_2$ 。
- D. 无法确定

3. 两个容器中分别装有氮气和二氧化碳, 它们的温度相同, 则下列各量中相同的是()。

- A. 分子平均动能。
- B. 分子平均速率
- C. 分子平均平动动能。
- D. 最概然速率

4. 4mol 的多原子分子理想气体, 当温度为 T 时, 其内能为()。

- A. $12kT$
- B. $10kT$
- C. $12RT$
- D. $10RT$

5. 当气体的温度升高时, 麦克斯韦速率分布曲线的变化为()。

- A. 曲线下的面积增大, 最概然速率增大
- B. 曲线下的面积增大, 最概然速率减小

C. 曲线下的面积不变,最概然速率增大

D. 曲线下的面积不变,最概然速率减小

E. 曲线下的面积不变,曲线的最高点降低

6. 下列对最概然速率 v_P 的表述中,正确的是()。

A. v_P 是气体分子可能具有的最大速率

B. 分子速率取 v_P 的概率最大

C. 速率分布函数 $f(v)$ 取极大值时所对应的速率就是 v_P

D. 就单位速率区间而言,分子速率处于 v_P 附近的概率最大

7. $f(v)$ 为速率分布函数,则速率 $v < v_P$ 的分子平均速率表达式为()。

$$\text{A. } \bar{v} = \int_0^{v_P} f(v) dv \quad \text{B. } \bar{v} = \frac{\int_0^{v_P} v f(v) dv}{\int_0^{v_P} f(v) dv}$$

$$\text{C. } \bar{v} = \int_0^{v_P} v f(v) dv \quad \text{D. } \bar{v} = \frac{1}{2} v$$

8. 体积固定的容器中,有一定量的理想气体,当温度逐渐升高时(设分子有效直径保持不变),分子的平均碰撞次数 \bar{Z} 和平均自由程 $\bar{\lambda}$ 的变化为()。

A. \bar{Z} 增大, $\bar{\lambda}$ 增大

B. \bar{Z} 增大, $\bar{\lambda}$ 不变

C. \bar{Z} 增大, $\bar{\lambda}$ 减少

D. \bar{Z} 和 $\bar{\lambda}$ 都保持不变

选择题解答

1. [解] 本题答案为(A)。

根据理想气体的状态方程 $P = nkT$, 当气体的压强与温度相同时, 单位体积中的分子数 n 相同。

2. [解] 本题答案为(C)。

根据理想气体的状态方程与理想气体内能公式:

$$PV = \frac{M}{\mu}RT$$

$$E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2}RT$$

可以写出 $E = \frac{i}{2}PV$

氮气和氢气容积相等,压强相同,它们的内能仅由自由度数 i 决定,氮气是单原子分子 $i = 3$,氢气是双原子分子 $i = 5$,则 $E_1 < E_2$ 。

3. [解] 本题答案为(C)。

分子的平均动能等于 $\frac{i}{2}kT$

分子的平均平动动能等于 $\frac{3}{2}kT$

分子的平均速率 $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$

分子的最概然速率 $v_p = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$

氮气和二氧化碳的温度相同,四个量中只有分子的平均平动动能相同。

4. [解] 本题答案为(C)。

理想气体的内能 $E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2}RT$, 已知 $\frac{M}{\mu} = 4\text{mol}$, 代入多原子分子自由度数 $i = 6$, 可得到 $E = 12RT$ 。

5. [解] 本题答案为(C,E)。

按照麦克斯韦速率分布函数的归一化条件,麦克斯韦速率分布曲线下的总面积不变。当气体的温度升高时,气体分子的最概然速率增大,由于曲线下的总面积不变,分布曲线在宽度增大的同时,高度降低。

6. [解] 本题答案为(C,D)。(略)

7. [解] 本题答案为(B)。(略)

速率 $v < v_P$ 的分子的平均速率表达式为

$$\bar{v} = \frac{\int_0^{v_P} v f(v) dv}{\int_0^{v_P} f(v) dv}$$

这是因为 $f(v)dv = \frac{dN}{N}$, 代入上式 $\bar{v} = \frac{\int_0^{v_P} v dN}{\int_0^{v_P} dN}$, 此式的分子

$\int_0^{v_P} v dN$ 表示 $v < v_P$ 的分子的速率总和, 分母 $\int_0^{v_P} dN$ 表示 $v < v_P$ 的分子数的总和, 它们的比值即 $v < v_P$ 的分子的平均速率。

8. [解] 本题答案为(B)。

分子的平均碰撞次数 \bar{Z} 与平均自由程 $\bar{\lambda}$ 的关系为

$$\bar{Z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}}$$

式中 \bar{v} 为分子的平均速率, $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ 。分子的平均自由程 $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$, d 为分子直径, n 为分子数密度。

根据题意, 体积 V 不变, 一定量的理想气体即气体质量 M 不变, 单位体积中的分子数即分子数密度 n 不变, 分子的平均自由程 $\bar{\lambda}$ 不变。当温度升高时, 分子的平均速率 \bar{v} 增大, 导致 \bar{Z} 增大。

二、填空题

1. 质量为 M 、摩尔质量为 μ 、分子数密度为 n 的理想气体, 处于平衡态时, 状态方程为 _____, 状态方程的另一形式为 _____, 其中, k 称为 _____, 其量值为 $k =$ _____。

2. 理想气体的压强公式为 _____, 表明宏观量压强 P 是由两个微观量的统计平均值 _____ 和 _____。

_____决定的。从气体动理论观点看,气体对器壁所作用的压强是_____的宏观表现。

3. 宏观量温度 T 与气体分子的平均平动动能 \bar{W} 的关系为 $\bar{W} =$ _____, 因此, 气体的温度是 _____ 的量度。

4. 理想气体的内能是 _____ 的单值函数, $\frac{i}{2}RT$ 表示 _____; $\frac{M}{\mu} \frac{i}{2}RT$ 表示 _____。

5. 当温度 $T =$ _____ 时, 氢分子的方均根速率等于离开地球表面的逃逸速率 11.2 km/s。

6. 同一温度下的氢气和氧气的速率分布曲线如图 8-1 所示, 其中曲线 ① 为 _____ 气的速率分布曲线, _____ 气的最概然速率较大。

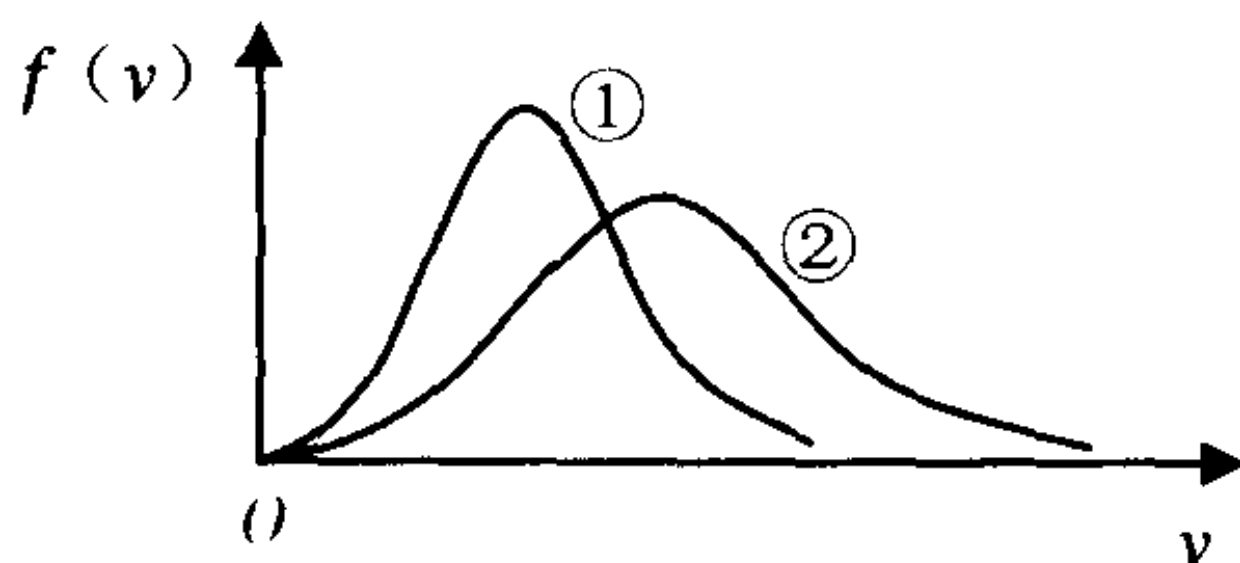


图 8-1

7. 设气体的速率分布函数为 $f(v)$, 总分子数为 N , 则:

① 处于 $v \sim v + dv$ 速率区间的分子数 $dN =$ _____;

② 处于 $0 \sim v_p$ 的分子数为 ΔN , 则 $\frac{\Delta N}{N} =$ _____;

③ 平均速率 \bar{v} 与 $f(v)$ 的关系为 $\bar{v} =$ _____。

8. 根据玻耳兹曼分布律, 当温度 T 恒定时, 处于一定速度区间和坐标区间的分子数与因子 _____ 成正比, 总能量 E 越高的状态, 分子占有该状态的概率就 _____, 因此, 从统计观点看, 分子总是优先占据 _____ 状态。

9. 在重力场中, 气体(分子质量为 m) 温度 T 恒定, 取 z 轴竖直向上, $z = 0$ 处的分子数密度为 n_0 , 则任一高度 z 处的分子数密度

为 $n =$ _____。若 $z = 0$ 处的压强为 P_0 ，并测得高度 z 处的压强为 P ，则 z 与 P 之间的关系为 $z =$ _____。

10. 标准状态下，空气分子的平均自由程 $\bar{\lambda} =$ _____
平均速率 $\bar{v} =$ _____，平均碰撞次数 $\bar{Z} =$ _____（已知空气的平均摩尔质量为 $29 \times 10^{-3} \text{kg/mol}$ ，空气分子的有效直径 $d = 3.5 \times 10^{-10} \text{m}$ ）。

填空题解答

1. [解] $PV = \frac{M}{\mu}RT$, $P = nkT$, 玻耳兹曼恒量, $1.38 \times 10^{-23} \text{JK}^{-1}$

2. [解] $P = \frac{2}{3}n\left(\frac{1}{2}m\bar{v}^2\right)$, 分子数密度, 分子平均平动动能, 大量分子热运动不断碰撞器壁

3. [解] $\frac{3}{2}kT$, 大量气体分子平均平动动能

4. [解] 温度, 1 摩尔理想气体的内能, 摩尔数为 $\frac{M}{\mu}$ 的理想气体的内能

5. [解] 分子的方均根速率 $\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, 当氢分子的方均根速率等于离开地球表面的逃逸速率 11.2 km/s 时, $11.2 = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_{H_2}}}$

可解出
$$T = \frac{(11.2)^2 \mu_{H_2}}{3R} = \frac{(11.2)^2 \times 2.02 \times 10^{-3}}{3 \times 8.31} = 1.01 \times 10^4 \text{K}$$

6. [解] 气体分子速率分布曲线上最大值对应的速率是最概然速率 v_P , $v_P \propto \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, 当温度一定时, 摩尔质量大的气体分子, 最概然速率小; 摩尔质量小的气体分子最概然速率大。所以 ① 为氧

气的速率分布曲线,氢气的最概然速率较大。

$$7. [\text{解}] dN = Nf(v)dv, \frac{\Delta N}{N} = \int_0^{v_P} v f(v) dv, \bar{v} = \int_0^\infty v f(v) dv$$

$$8. [\text{解}] e^{-E/kT}. \text{ 越小, 低能量}$$

9. [解] 根据玻耳兹曼分布律, 气体分子在重力场中分布在高度为 z 处单位体积内的分子数

$$n = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

对于理想气体, 温度 T 恒定时

$$P = nkT = n_0 kT e^{-\frac{mgz}{kT}} = P_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

式中 $P_0 = n_0 kT$ 表示在 $z = 0$ 处的压强

$$\text{对} \quad \frac{P_0}{P} = e^{\frac{mgz}{kT}}$$

取对数可得

$$z = \frac{kT}{mg} \ln \frac{P_0}{P}$$

10. [解] 标准状态下, $T = 273\text{K}$, $P = 1.013 \times 10^5 \text{Pa}$ 。已知空气分子直径 $d = 3.5 \times 10^{-10} \text{m}$, 空气的平均摩尔质量 $\mu = 29 \times 10^{-3} \text{kg/mol}$ 。

可以算出标准状态下空气分子的平均自由程

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 P} = \\ &= \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 273}{1.41 \times 3.14 \times (3.5 \times 10^{-10})^2 \times 1.013 \times 10^5} = \\ &= 6.9 \times 10^{-8} \text{m} \end{aligned}$$

$$\text{平均速率 } \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = \sqrt{\frac{8 \times 8.31 \times 273}{3.14 \times 29 \times 10^{-3}}} = 446 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{平均碰撞频率 } \bar{Z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} = 6.5 \times 10^9 \text{s}^{-1}$$

三、问答题

1. 一定质量的理想气体, 当温度不变时, 气体的压强随体积

的减小而增大(玻意耳定律);当体积不变时,压强随温度的升高而增大(查理定律)。从宏观上说,这两种变化同样是使压强增大,从微观上说,它们是否有区别?哪些是共同之处?哪些是具体过程中的差异之处?

[答]由 $P = nkT$ 可知,当 T 不变时,由于 V 变小, n 会变大,则会引起 P 增大;当 V 不变, n 也不变,由于 T 变大,则 P 也会变大。其共同之处是都因对器壁的碰撞频率增加而导致压强的增加,但是其具体过程又有不同,前者是由于 n 增加而导致对器壁的碰撞频率增加;而后者是由于 \bar{v}^2 增大(因此 \bar{v} 也变大),除了导致对器壁的碰撞次数增加外,还使每次碰撞器壁的冲量增加。

四、计算与证明题

1. 体积为 $V = 1.20 \times 10^{-2} \text{ m}^3$ 的容器中储有氧气,其压强 $P = 8.31 \times 10^5 \text{ Pa}$,温度为 $T = 300 \text{ K}$,求:

- ① 单位体积中的分子数 n ;
- ② 分子平均平动动能;
- ③ 气体的内能。

[解] ① $P = nkT$

$$n = \frac{P}{kT} = \frac{8.31 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} = 2.00 \times 10^{26} \text{ m}^{-3}$$

② 分子平均平动动能 \bar{W}

$$\bar{W} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300 = 6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$$

③ 气体的内能 E

$$\begin{cases} E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} RT \\ PV = \frac{M}{\mu} RT \end{cases}$$

所以

$$E = \frac{i}{2} PV$$

氧气为双原子分子 $i = 5$

$$E = \frac{5}{2}PV = \frac{5}{2} \times 8.31 \times 10^5 \times 1.20 \times 10^{-2} = 2.49 \times 10^4 \text{J}$$

2. 储有氧气(处于标准状态)的容器以速率 $v = 100\text{m/s}$ 作定向运动,当容器突然停止运动,全部定向运动的动能都变为气体分子热运动的动能,此时气体的温度和压强为多少?

[解] 标准状态 $T_0 = 273\text{K}$ $P_0 = 1\text{atm} = 1.013 \times 10^5\text{Pa}$

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{M}{\mu} \frac{5}{2}R\Delta T$$

$$\Delta T = \frac{\mu v^2}{5R} \quad \text{代入} \quad \mu = 32 \times 10^{-3}\text{kg}$$

$$T = T_0 + \Delta T = 273\text{K} + 7.7\text{K} = 280.7\text{K}$$

因为 $P_0 = nkT_0, P = nkT$

$$P = P_0 \frac{T}{T_0} = 1.04 \times 10^5\text{Pa}$$

3. 若大量粒子的速率分布曲线如图 8-2 所示(当 $v > v_0$ 时,粒子数为零)。

① 由 v_0 确定常数 C ;

② 求粒子的平均速率和方均根速率。

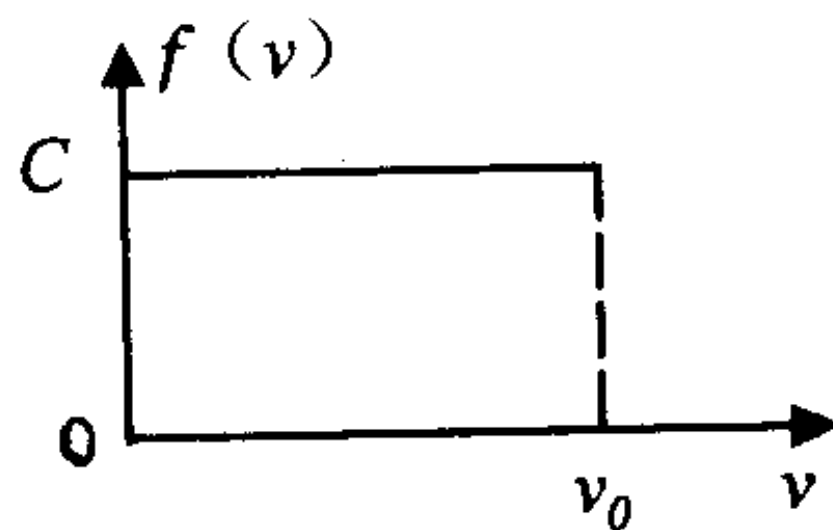


图 8-2

[解] ① 由 $f(v)-v$ 图可知

$$f(v) = C \quad (0 \leq v \leq v_0)$$

$$f(v) = 0 \quad (v > v_0)$$

$$\text{代入 } f(v) \text{ 归一化条件 } \int_0^{v_0} C dv = 1$$

$$Cv_0 = 1 \quad \text{所以} \quad C = \frac{1}{v_0}$$

② 平均速率

$$\bar{v} = \int_0^{v_0} v f(v) dv = \int_0^{v_0} v C dv = \frac{1}{v_0} \int_0^{v_0} v dv = \frac{v_0}{2}$$

$$\bar{v}^2 = \int_0^{v_0} v^2 f(v) dv = \int_0^{v_0} v^2 C dv = \frac{1}{v_0} \int_0^{v_0} v^2 dv = \frac{1}{3} v_0^2$$

方均根速率 $\sqrt{\bar{v}^2} = \frac{v_0}{\sqrt{3}}$

五、附加题

1. 在 300K 时,空气中速率在 ① v_p 附近;② $10v_p$ 附近,单位速率区间($\Delta v = 1\text{m/s}$)的分子数占分子总数的百分比各是多少?平均来讲, 10^5mol 的空气中这区间的分子数又各是多少?(空气的摩尔质量按 29g/mol 计)。

[解] 麦克斯韦速率分布为

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} \Delta v =$$

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_p^3} e^{-v^2/v_p^2} \Delta v$$

式中 v_p 为最概然速率 $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$

当 $T = 300\text{K}$ 时,空气分子的

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \times 8.31 \times 300}{29 \times 10^{-3}}} = 415\text{m/s}$$

对 $\Delta v = 1\text{m/s}$

① 在 $v = v_p$ 附近,单位速率区间的分子数占分子总数的百分比

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_p^3} e^{-v^2/v_p^2} \Delta v =$$

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{415} e^{-1} \times 1 = 0.002 = 0.2\%$$

② 在 $v = 10v_p$ 附近,单位速率区间的分子数占分子总数的百

分比

$$\begin{aligned}\frac{\Delta N}{N} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{(10v_p)^2}{v_p^3} e^{(-10v_p)^2/v_p^2} \Delta v = \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \times \frac{100}{415} e^{-100} \times 1 = 2.0 \times 10^{-44} = \\ &= 2.0 \times 10^{-42} \%\end{aligned}$$

10^5 mol 的空气中的总分子数 $N = 6.02 \times 10^{23} \times 10^5$, 在 v_p 附近, $\Delta v = 1 \text{ m/s}$ 区间的分子数为

$$N \times 0.2\% = 6.02 \times 10^{23} \times 10^5 \times 0.2\% = 1.2 \times 10^{26} \text{ 个}$$

在 $10v_p$ 附近, $\Delta v = 1 \text{ m/s}$ 区间的分子数为

$$\begin{aligned}N \times 2 \times 10^{-42}\% &= 6.02 \times 10^{23} \times 10^5 \times 2 \times 10^{-42}\% = \\ &= 1.2 \times 10^{-25} \approx 0 \text{ 个}\end{aligned}$$

第9章 热 力 学

一、选择题

1. 下列表述中错误的为()。

A. 系统由外界吸热时,内能必然增加,温度升高

B. 考虑到热量 Q 和功 A 都是过程量,因此,对于任何变化过程,系统所吸收的热量和外界对系统做功的总和,不仅与系统始、末状态有关,而且与具体过程有关

C. 在等体过程中,系统内能的变化为 $\Delta E = \frac{M}{\mu} C_V (T_2 - T_1)$,
而在等压过程中系统内能变化为 $\Delta E = \frac{M}{\mu} C_P (T_2 - T_1)$

D. 热机效率的一般表达式为 $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

2. 如图 9-1 所示,理想气体卡诺循环过程中两条绝热线下面的面积为 S_1 和 S_2 ,则()。

A. $S_1 > S_2$ B. $S_1 = S_2$

C. $S_1 < S_2$ D. 无法确定

3. 某理想气体分别进行了如图 9-2 所示的两个卡诺循环 (abcd) I 和 II ($a'b'c'd'a'$), 已知两低温热源温度相等, 且两循环曲线所围面积相等, 设循环

I 的效率为 η , 从高温热源吸热 Q , 循环 II 的效率为 η' , 从高温热源吸热 Q' , 则()。

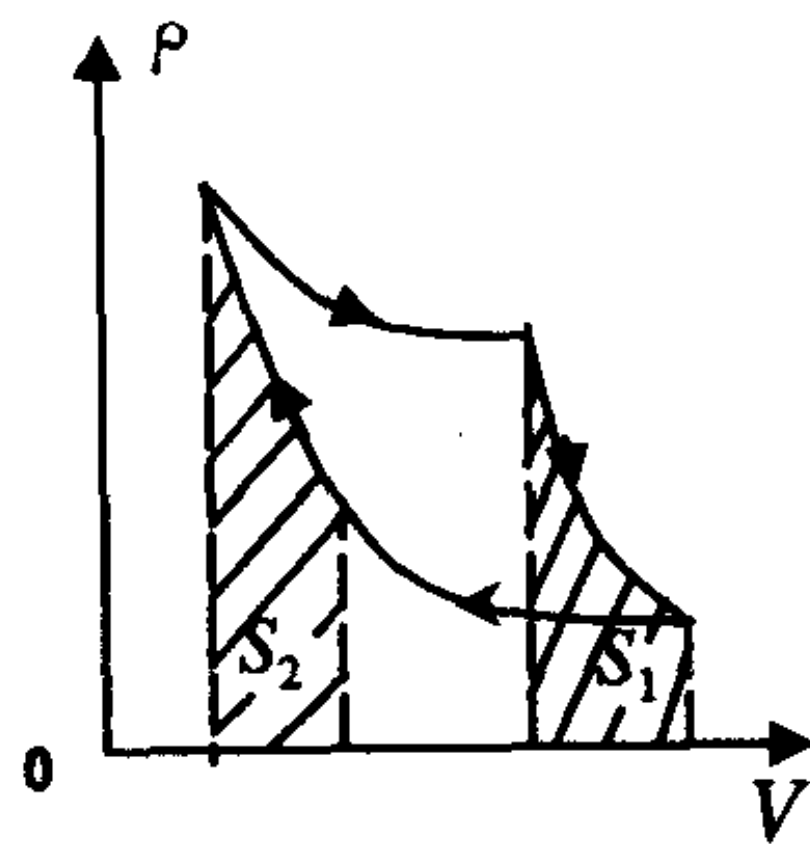


图 9-1

- A. $\eta < \eta', Q < Q'$ B. $\eta > \eta', Q < Q'$
 C. $\eta < \eta', Q > Q'$ D. $\eta > \eta', Q > Q'$

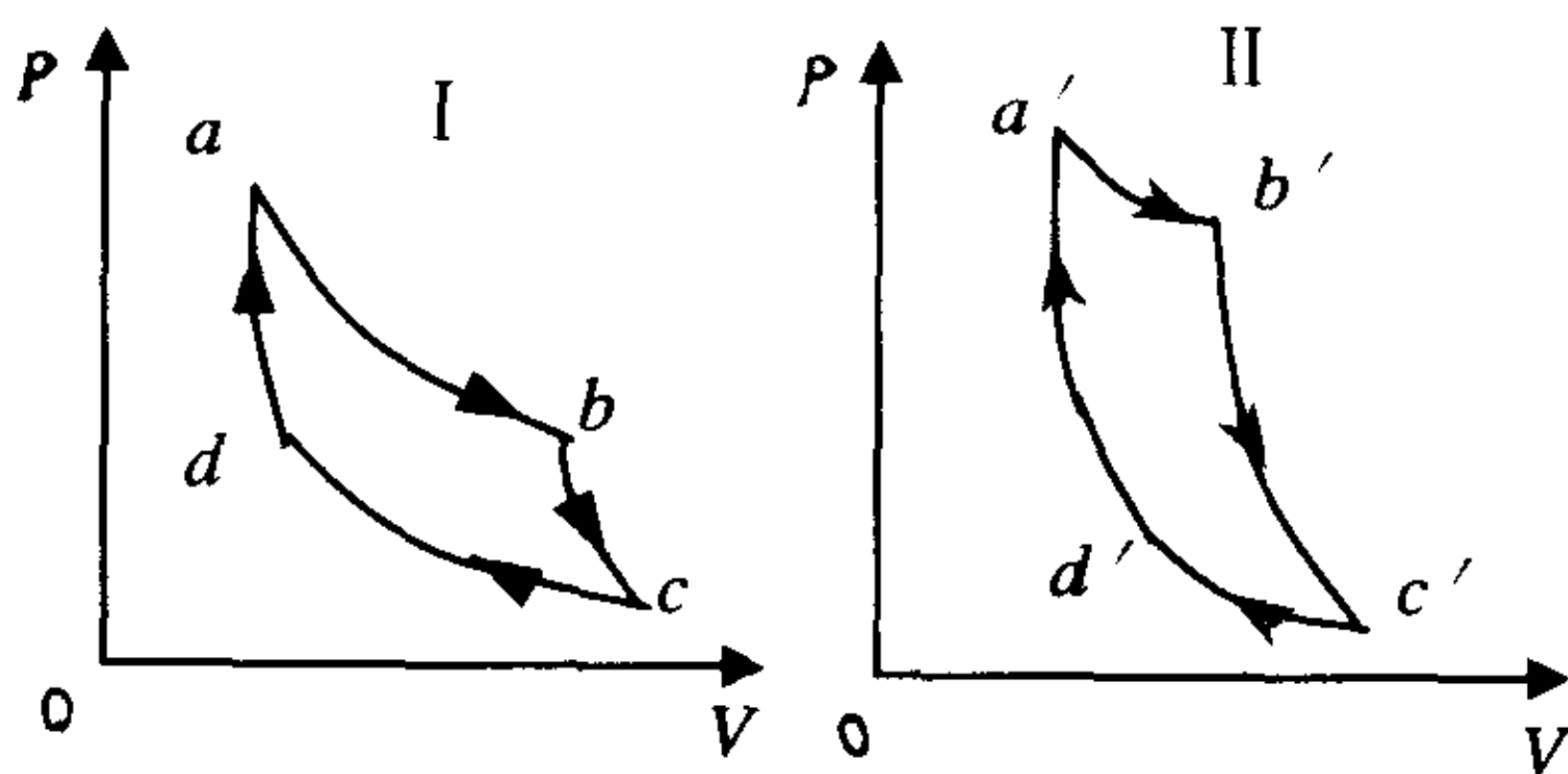


图 9-2

4. 某理想气体状态变化时,内能随压强的变化关系如图 9-3 中的直线 ab 所示,则 a 到 b 的变化过程一定是()。

- A. 等压过程 B. 等体过程
 C. 等温过程 D. 绝热过程

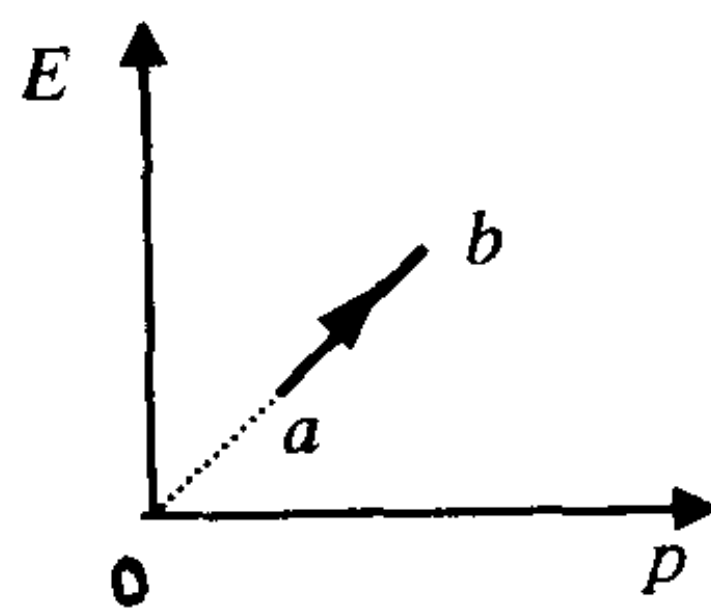


图 9-3

5. 若高温热源的温度为低温热源温度的 n 倍,以理想气体为工作物质的卡诺机工作于上述高、低温热源之间,则从高温热源吸收的热量与向低温热源放出的热量之比为()。

- A. $\frac{n+1}{n}$ B. $\frac{n-1}{n}$ C. n D. $n-1$

6. 分子总数相同的三种理想气体 He , O_2 和 CO_2 , 它们各自独立地进行等压膨胀,对外做功 A 与系统内能量 ΔE 的比值最小的气体是()。

- A. He B. O_2 C. CO_2 D. 无法确定

7. 按上题,若三种气体从同一初态出发,各自独立地进行等压膨胀,且吸收的热量相等,则终态的体积最大的气体是()。

- A. He B. O_2

C. CO_2

D. 三种气体终态的体积相同

8. 热力学第二定律指出了热力学过程进行的方向性和条件, 下列表述中正确的是()。

A. 功可以全部转化为热量, 但热量不能全部转化为功

B. 热量可以从高温物体传到低温物体, 但不能从低温物体传到高温物体

C. 对孤立系统来讲, 自发过程总是按系统熵值增加的方向进行

D. 对孤立系统来讲, 其内部发生的过程, 总是由概率小的宏观态向概率大的宏观态进行

E. 不可逆过程就是不能向相反方向进行的过程

F. 一切自发过程都是不可逆的

选择题解答

1. [解] 本题答案为(A, B, C, D)。

根据热力学第一定律 $Q = \Delta E + A$, 系统由外界吸热时, 可以将吸收的热量全部对外做功, 内能不变, 等温过程就是这种情况。

系统所吸收的热量和外界对系统做功的总和为系统内能的增量, 内能的增量仅与系统始末状态有关, 而与过程无关。

内能的变化 $\Delta E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R(T_2 - T_1)$, 理想气体的摩尔定体热容 $C_V = \frac{i}{2} R$, 则内能的变化可以写成 $\Delta E = \frac{M}{\mu} C_V(T_2 - T_1)$, 与过程无关。

热机效率的一般表达式为 $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$, 只有卡诺热机的效率

$$\eta_c = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

2. [解] 本题答案为(B)。

如图 9-1 所示,理想气体卡诺循环过程中两条绝热线下面的面积 S_1 表示绝热膨胀过程系统对外界所做的功, S_2 表示绝热压缩过程外界对系统所做的功。

绝热膨胀过程, $Q = 0$, 系统对外界所做的功等于系统内能的减少。

$$A = -\Delta E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R(T_2 - T_1) < 0$$

绝热压缩过程, $Q = 0$, 外界对系统所做的功等于系统内能的增加。

$$-A = \Delta E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R(T_2 - T_1) > 0$$

比较可知,绝热膨胀过程系统对外界做功与绝热压缩过程外界对系统做功数值相等,则

$$S_1 = S_2$$

3. [解] 本题答案为 (C)。

两循环曲线所围面积相等,表示两循环过程对外做的净功相等。

$$\text{两个卡诺循环的效率为 } \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}; \eta' = 1 - \frac{T'_2}{T'_1}$$

由于 $T_2 = T'_2$; $T_1 < T'_1$, 则 $\eta < \eta'$

$$\text{再根据热机效率的定义 } \eta = \frac{A}{Q_{\text{吸}}}, \eta' = \frac{A'}{Q'_{\text{吸}}}$$

由于两循环过程对外做的净功相等 $A = A'$, $\eta' > \eta$, 则 $Q' < Q$ 。

4. [解] 本题答案为 (B)。

理想气体的内能为

$$E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} RT = \frac{i}{2} PV$$

只有当 $V = \text{恒量}$ 时, E 与 P 才成线性关系, 故 ab 过程为等体过程。

5. [解] 本题答案为 (C)。

对于卡诺循环 $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

若 $T_1 = nT_2$, $\eta = 1 - \frac{1}{n} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$

则从高温热源吸收的热量 Q_1 与向低温热源放出的热量 Q_2 之比为 $\frac{Q_1}{Q_2} = n$

6. [解] 本题答案为(C)。

理想气体等压膨胀过程系统对外所做的功

$$A = P(V_2 - V_1) = \frac{M}{\mu} R(T_2 - T_1)$$

内能的增量 $\Delta E = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R(T_2 - T_1)$

对于分子总数相同的三种理想气体, $N = N_0 \frac{M}{\mu}$

$$\frac{A}{\Delta E} = \frac{\frac{N}{N_0} R(T_2 - T_1)}{\frac{N}{N_0} \frac{i}{2} R(T_2 - T_1)} = \frac{2}{i}$$

He: 单原子分子 $i = 3$

O₂: 双原子分子 $i = 5$

CO₂: 多原子分子 $i = 6$

自由度数 i 大的气体, $\frac{A}{\Delta E}$ 小, 则 CO₂ 的 $\frac{A}{\Delta E}$ 最小。

7. [解] 本题答案为(A)。

根据热力学第一定律 $Q = \Delta E + A$ 若三种气体从同一初态出发, 各自独立地进行等压膨胀, 且吸收的热量 Q 相同, 系统内能增量 ΔE 大的气体对外做功 A 小, 终态的体积小; 反之 ΔE 小的气体, 系统对外做功 A 大, 终态的体积大。He, O₂, CO₂ 三种气体中, He 的 ΔE 最小, 终态的体积最大。

8. [解] 本题答案为(C, D, F)。(略)

二、填空题

1. 热力学第一定律的实质是 _____, 热力学第二定律指明了 _____。

2. 一定量的理想气体从同一初态 $a(P_0, V_0)$ 出发, 先后分别经两个准静态过程 ab 和 ac , b 点的压强为 P_1 , c 点的体积为 V_1 , 如图 9-4 所示, 若两个过程中系统吸收的热量相同, 则该气体的 $\gamma = \frac{C_P}{C_V} =$ _____。

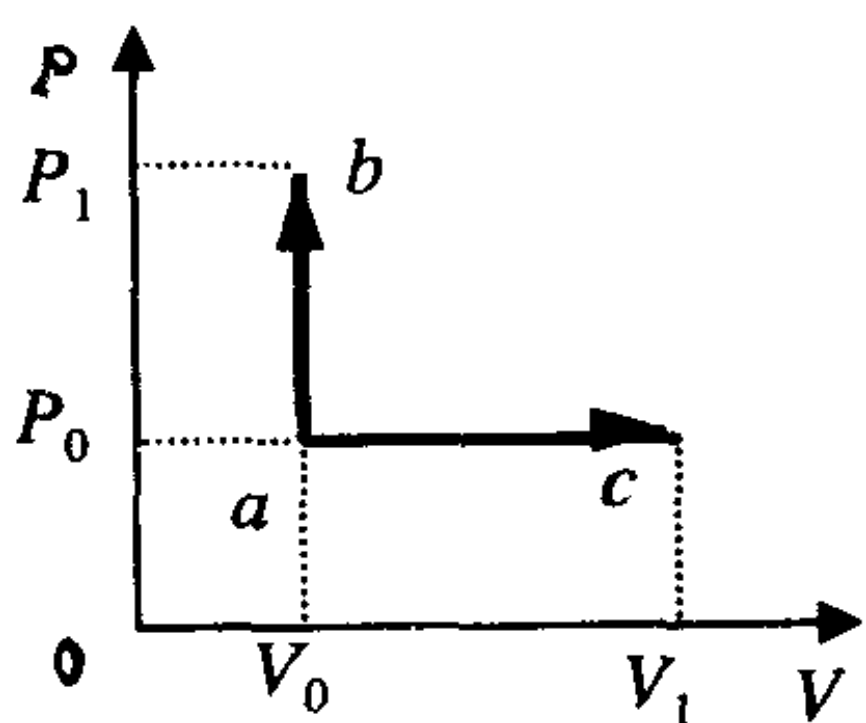


图 9-4

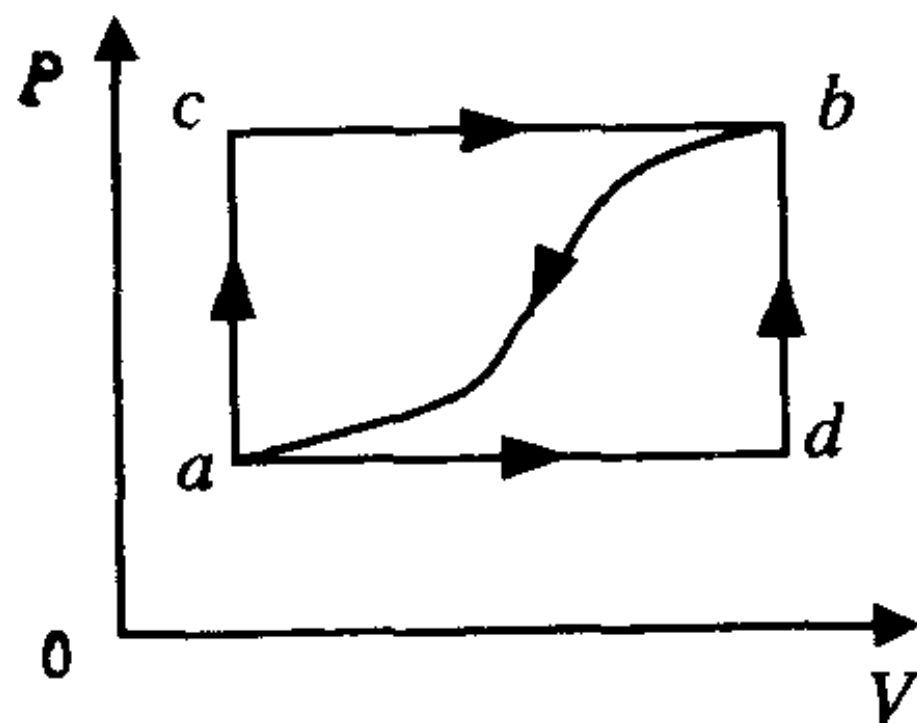


图 9-5

3 如图 9-5 一理想气体系统由状态 a 沿 acb 到达状态 b , 有 350J 热量传入系统, 而系统做功 130J。

① 经过 adb 过程, 系统做功 40J, 传入系统的热量 $Q =$ _____。

② 当系统由状态 b 沿曲线 ba 返回状态 a 时, 外界对系统做功 60J, 则系统吸收热量 $Q =$ _____。

4. 对下表所列的理想气体各过程, 并参照图 9-6, 填表判断系统的内能增量 ΔE 、做功 A 和传递热量 Q 的正负(用符号 $+$, $-$, 0 表示):

过 程		ΔE	A	Q
等体减压				
等压压缩				
绝热膨胀				
图(a) $a \rightarrow b \rightarrow c$				
图(b)	$a \rightarrow b \rightarrow c$			
	$a \rightarrow d \rightarrow c$			

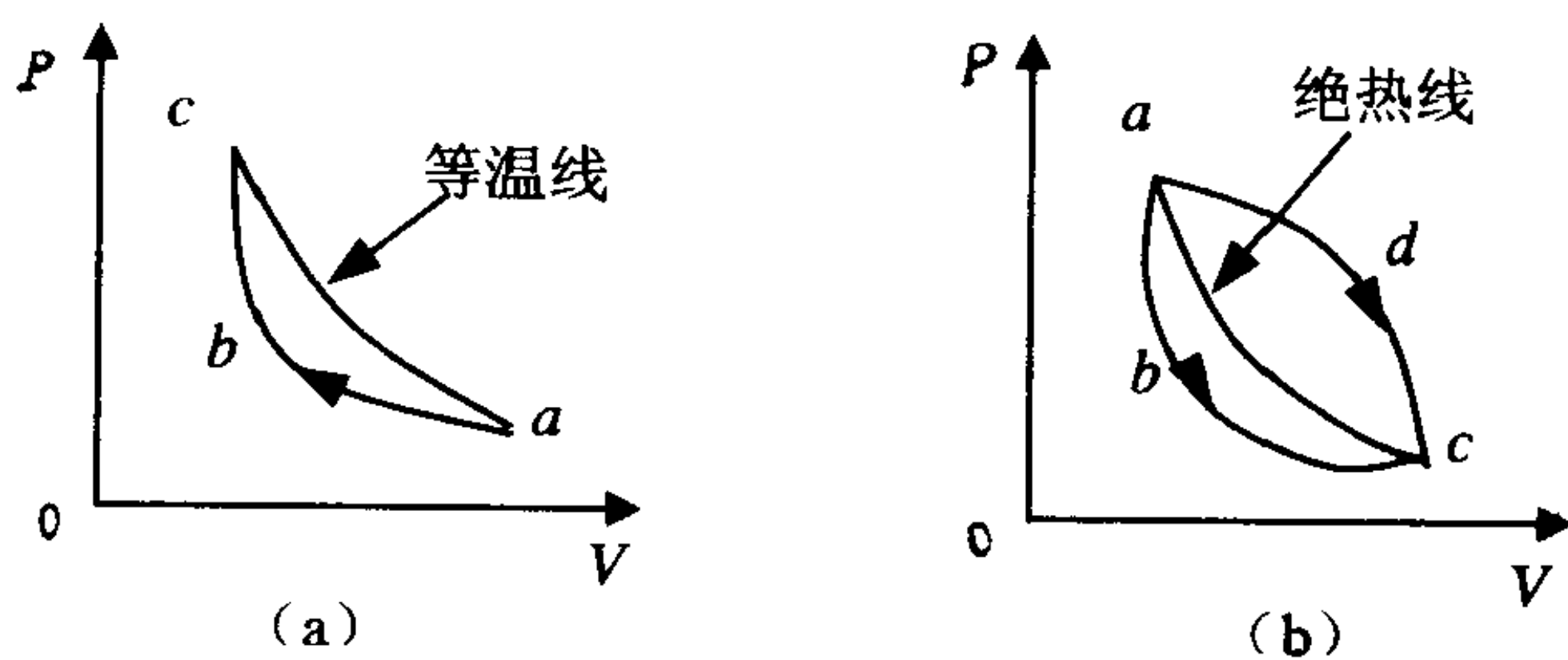


图 9-6

5. 一卡诺热机的低温热源温度为 12°C , 效率为 40% , 如将其效率提高到 50% , 则高温热源温度需提高_____。

填空题解答

1. [解] 包括热现象在内的能量转化与守恒定律, 热力学过程进行的方向性和条件

2. [解] ab 过程为等体过程, 吸收的热量

$$Q = \frac{M}{\mu} C_v (T_b - T_a)$$

ac 过程为等压过程, 吸收的热量

$$Q = \frac{M}{\mu} C_P (T_c - T_a)$$

按题意两个过程中吸热相同,则有

$$C_V(T_b - T_a) = C_P(T_c - T_a)$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{T_b - T_a}{T_c - T_a} = \frac{P_1 V_0 - P_0 V_0}{P_0 V_1 - P_0 V_0} = \frac{V_0(P_1 - P_0)}{P_0(V_1 - V_0)}$$

3. [解] 理想气体的内能仅是温度的函数,acb 过程内能的增量 $\Delta E = Q - A$, Q 为传入系统的热量, A 为系统对外做功,代入 $Q = 350\text{J}$, $A = 130\text{J}$, 可得 $\Delta E = 220\text{J}$ 。

adb 过程,系统的 ΔE 不变,对外做功 40J ,传入系统的热量 $Q = \Delta E + A = 220 + 40 = 260\text{J}$ 。

系统由 b 沿曲线 ba 返回 a 时,温度降低,内能减小, $\Delta E = -220\text{J}$,外界对系统做功 60J ,则系统吸收的热量 $Q = (-220) + (-60) = -280\text{J}$

4. [解] 等体减压过程 $A = 0$; $\Delta T < 0$, $\Delta E < 0$; $Q = \Delta E + A = \Delta E < 0$ 。

等压压缩过程 $T_1 > T_2$, $\Delta T < 0$, $\Delta E < 0$; $V_1 > V_2$, $\Delta V < 0$, $A < 0$; $Q = \Delta E + A$, $Q < 0$

绝热膨胀过程 $Q = 0$, $V_2 > V_1$, $\Delta V > 0$, $A > 0$; $Q = \Delta E + A = 0$, $\Delta E < 0$ 。

图 9-6(a) $a \rightarrow b \rightarrow c$ 过程,由于 $T_a = T_c$, $a \rightarrow b \rightarrow c$ 过程 $\Delta E = 0$;又由于 $V_a > V_c$, $A < 0$; $Q = A < 0$ 。

图 9-6(b) $a \rightarrow b \rightarrow c$ 过程,由于 a, c 在同一条绝热线上, $\Delta E = \Delta E_{\text{绝热}}$,而 $P-V$ 图上过程曲线下的面积表示功,与绝热线下的面积相比较可得到 $A < A_{\text{绝热}}$ 。 $Q = \Delta E + A$ 与 $0 = \Delta E_{\text{绝热}} + A_{\text{绝热}}$ 相比较,可得到 $Q < 0$ 。

$$T_c < T_a, \Delta T < 0, \Delta E < 0;$$

$$V_c > V_a, \Delta V > 0, A > 0。$$

图 9-6(b) $a \rightarrow d \rightarrow c$ 过程, 与绝热线比较 $\Delta E = \Delta E_{\text{绝热}}, A > A_{\text{绝热}}$, 可得到 $Q > 0$

$$T_c < T_a, \Delta T < 0, \Delta E < 0$$

$$V_c > V_a, \Delta V > 0, A > 0$$

5. [解] 卡诺热机的效率 $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, 已知 T_2 与 η , 可以求出

$$T_1 = \frac{T_2}{1 - \eta}$$

当 $T_2 = 285 \text{ K}$ 时, $\eta = 40\%$, $T_1 = 475 \text{ K}$, 若将效率提高到 50% , 即 $\eta = 50\%$, $T_1 = 570 \text{ K}$, 因此高温热温温度需提高 $570 - 475 = 95 \text{ K}$ 。

三、问答题

1. 致冷机的效率可以大于 1, 试问这一事实与能量守恒定律是否矛盾?

[答] 致冷机的效率大于 1 时, 它就意味着做较少的功就可以使较多的热量从低温热源输送到高温热源, 这与能量转化和守恒定律并不矛盾。这里发生的是在外界帮助下的能量传输过程, 并不是单纯的能量转化过程, 能量传输和能量转化是两个不同的概念。

四、计算与证明题

1. 一摩尔刚性双原子理想气体, 经历一循环过程 $abca$ 如图 9-7 所示, 试计算:

① 系统对外做净功为多少?

② 该循环热机的效率 $\eta = ?$

[解] ① $a \rightarrow b$ $A = P_0 V_0 \ln 2$

$$b \rightarrow c \quad A = -0.5 P_0 V_0$$

$$c \rightarrow a \quad A = 0$$

$abca$ 过程系统对外做净功 $A = P_0 V_0 (\ln 2 - 0.5)$

$$\textcircled{2} Q_{a \rightarrow b} = P_0 V_0 \ln 2$$

$$Q_{c \rightarrow a} = \frac{5}{2} R (T_a - T_c) = \frac{5}{4} P_0 V_0$$

$$Q_{\text{吸}} = P_0 V_0 (\ln 2 + \frac{5}{4})$$

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{吸}}} = \frac{\ln 2 - 0.5}{\ln 2 + \frac{5}{4}} = 9.8\%$$

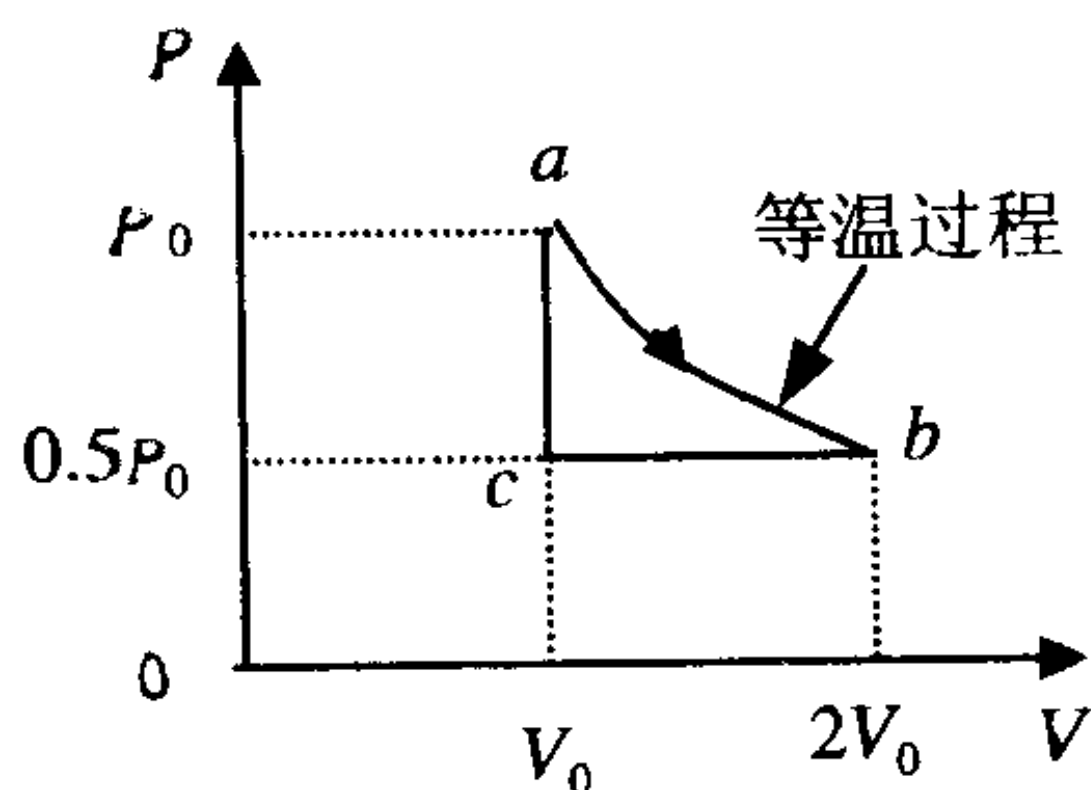


图 9-7

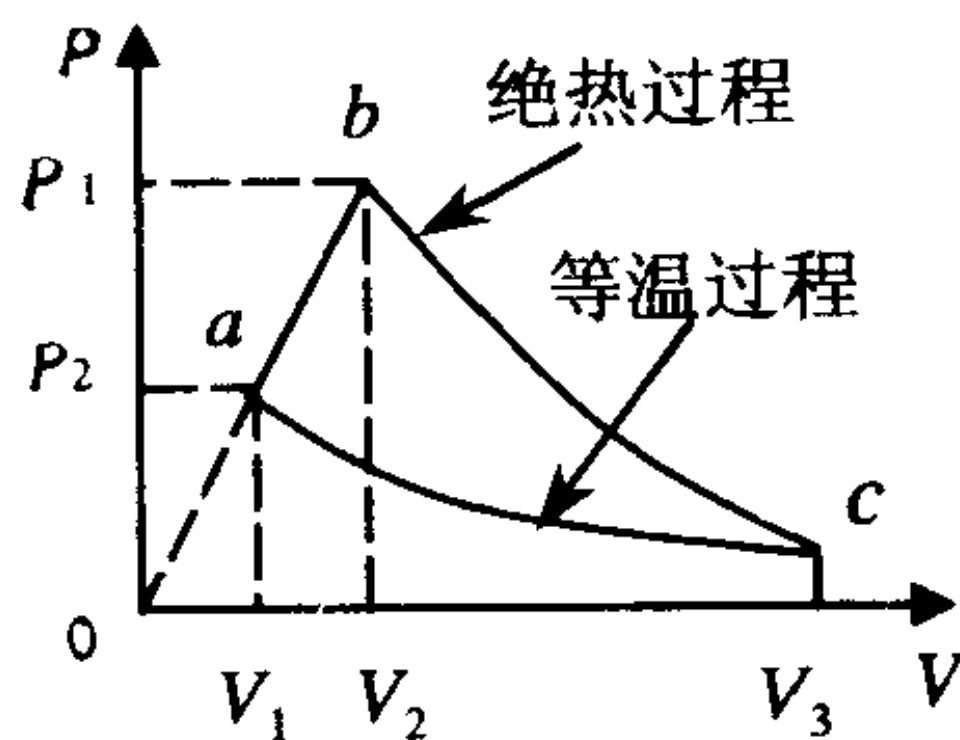


图 9-8

2. 1mol 氧气经图 9-8 所示循环过程 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$, 其中 P_1 , V_1 , P_2 , V_2 及 V_3 为已知量, 求各过程气体对外所做的功。

[解] $a \rightarrow b$ 过程气体对外所做的功即 P - V 图中 ab 直线下的面积。由图知

$$A_{ab} = \frac{1}{2} (P_2 V_2 - P_1 V_1)$$

$b \rightarrow c$ 过程

$$A_{bc} = C_V (T_b - T_c) = \frac{C_V}{R} (P_2 V_2 - P_3 V_3) =$$

$$\frac{5}{2} (P_2 V_2 - P_1 V_1)$$

$c \rightarrow a$ 过程

$$A_{ca} = \int_{V_3}^{V_1} P dV = RT_a \int_{V_3}^{V_1} \frac{dV}{V} = RT_a \ln \frac{V_1}{V_3} = P_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_3}$$

3. ① 夏季使用房间空调器使室内保持凉爽, 须将热量以 $2000 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$ 的散热功率排至室外, 设室温为 27°C , 室外为 37°C , 求空调器所需的最小功率。

② 冬天使用房间空调器使室内保持温暖, 设室外温度为 -3°C , 室温需保持 27°C , 仍用上面所给的功率, 则每秒传入室内的热量是多少?

[解] ① 致冷机所需最小功率, 即卡诺致冷机的功率。致冷机从低温热源吸热功率 $P_{\text{吸}} = 2000 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$, 设空调功率为 $P_{\text{空}}$, 一个循环所需时间为 Δt , 则

$$\omega = \frac{Q_2}{|A|} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

即

$$\omega = \frac{P_{\text{吸}} \Delta t}{P_{\text{空}} \Delta t} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

由此得

$$P_{\text{空}} = P_{\text{吸}} \left(\frac{T_1 - T_2}{T_2} \right)$$

而

$$T_1 = 310 \text{ K}, \quad T_2 = 300 \text{ K}$$

故

$$P_{\text{空}} = 2000 \times \left(\frac{310 - 300}{300} \right) = 66.7 \text{ W}$$

② 已知 $T_1 = 300 \text{ K}$, $T_2 = 270 \text{ K}$, $P_{\text{空}} = 66.7 \text{ W}$, 设“热泵”从低温热源吸热功率为 $P_{\text{吸}}$

则

$$\omega = \frac{Q_2}{|A|} = \frac{P_{\text{吸}} \Delta t}{P_{\text{空}} \Delta t} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

由此得 $P_{\text{吸}} = P_{\text{空}} \left(\frac{T_2}{T_1 - T_2} \right) = 66.7 \times \left(\frac{270}{300 - 270} \right) = 600.3 \text{ W}$

又卡诺循环中 $|A| = |Q_1| - |Q_2|$

$$|Q_1| = |A| + |Q_2| = P_{\text{空}} \Delta t + P_{\text{吸}} \Delta t$$

故每秒传入室内的热量为

$$\frac{|Q_1|}{\Delta t} = P_{\text{空}} + P_{\text{吸}} = 66.7 + 600.3 = 667 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$$

五、附加题

1. 总结理想气体各等值过程及绝热过程中的有关公式,填写下表

过程	过程方程	吸收热量 Q	对外做功 A	内能的增量 ΔE
等体				
等压				
等温				
绝热				

2. 你每天大约向周围环散发 $8 \times 10^6 \text{ J}$ 热量,试估算你每天产生多少熵?忽略你进食时带进体内的熵,环境的温度按 288 K 计算。

[解] 设人体温度为 $T_1 = 37^\circ\text{C} = 310 \text{ K}$

环境温度为 $T_2 = 288 \text{ K}$ 。一天产生的熵即人和环境熵的增量之和,即

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 = -\frac{Q}{T_1} + \frac{Q}{T_2} = \\ &Q\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) = 8 \times 10^6 \times \left(\frac{1}{288} - \frac{1}{310}\right) = \\ &1.92 \times 10^3 \text{ J/K} \end{aligned}$$

第 10 章 振 动

一、选择题

1. 弹簧振子的振幅增加 1 倍, 则()。

- A. 振动周期增加 1 倍
- B. 最大速度增加 1 倍
- C. 总能量增加 2 倍
- D. 最大加速度不变

2. 质点作简谐振动, 其速度与时间的曲线如图 10-1 所示, 则该质点的振动方程中的初相位应为()。

- A. $\frac{\pi}{6}$
- B. $\frac{5\pi}{6}$
- C. $-\frac{\pi}{6}$
- D. $-\frac{5\pi}{6}$

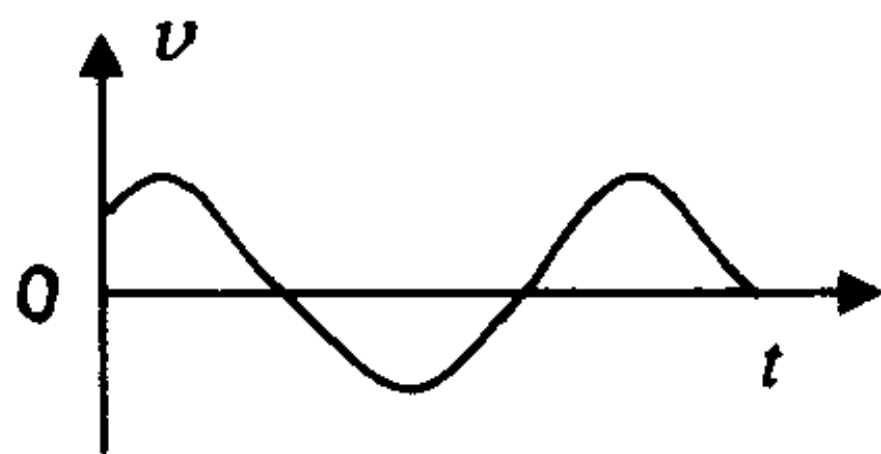


图 10-1

3. 下列说法中正确的是()。

- A. 同方向, 同频率的两个简谐振动合成后, 合振动仍为简谐振动
- B. 同方向, 不同频率的两个简谐振动合成后, 合振动不是简谐振动
- C. 同频率, 相互垂直的两个简谐振动合成后, 一般情况下是椭圆运动
- D. 不同频率, 相互垂直的两个简谐振动合成后, 合振动也可能是简谐振动

4. 下列各式是简谐振动的是(其中 A, B, ω 均为常数)()。

- A. $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
- B. $x = A\cos\omega t + B\sin 2\omega t$
- C. $x = A\cos\omega t + 2B\sin\omega t$
- D. $x = A\cos\omega t + B$

5. 两个振动方向, 振幅 A , 频率均相同的简谐振动, 每当它们经过振幅一半处时相遇, 且运动方向相反, 则()。

- A. 相位差 $\Delta\varphi = \pi$, 合振幅 $A' = 0$
- B. 相位差 $\Delta\varphi = 0$, 合振幅 $A' = 2A$
- C. 相位差 $\Delta\varphi = \frac{2}{3}\pi$, 合振幅 $A' = A$
- D. 相位差 $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, 合振幅 $A' = \sqrt{2}A$

6. 质点作简谐振动, 其速度最大值为 $V_m = 3 \times 10^{-2} \text{m/s}$, 振幅 $A = 2 \times 10^{-2} \text{m}$, 若从速度为正的最大值开始计时, 则()。

- A. 周期 $T = \frac{4}{3}$, 初相位 $\varphi = 0$
- B. 周期 $T = \frac{4\pi}{3}$, 初相位 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$
- C. 最大加速度 $a_m = 4.5 \times 10^{-2} \text{m/s}^2$, 圆频率 $\omega = \frac{3}{2}$
- D. 周期 $T = 4\pi$, 初相位 $\varphi = \frac{\pi}{2}$

7. 将两个振动方向、振幅、周期均相同的简谐振动合成后, 若合振幅和分振动的振幅相同, 则这两个分振动的相位差为()。

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

8. 为了测定音叉 C 的振动频率, 另选两个和 C 频率相近的音叉 a 和 b , 其频率已知 $\nu_a = 500 \text{Hz}$, $\nu_b = 495 \text{Hz}$, 先使音叉 a 和 c 同时振动, 测出每秒钟声响加强两次, 然后使音叉 b 和 c 同时振动, 测出每秒钟声响加强 3 次, 则音叉 c 的频率为()。

- A. 502Hz B. 499Hz C. 498Hz D. 497Hz

选择题解答

1. [解] 本题答案为(B)。

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad m, K \text{ 未变故周期 } T \text{ 不变。}$$

$$V_m = A\omega, \quad A \text{ 增加 1 倍故最大速度增加 1 倍。}$$

$$E = \frac{1}{2}KA^2, \quad E \text{ 增加 3 倍。}$$

$$a_m = A\omega^2, \quad a_m \text{ 增加 1 倍。}$$

2. [解] 本题答案为(D)。

由 $V-t$ 曲线知 $t=0$ 时, V 为正值且 V 增大, 从 V 的旋转矢量图 10-2 所示得速度初相位 φ_v 应在第四象限,

又知: $\varphi_v = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$ 故 φ_0 应在第三象限。选 D

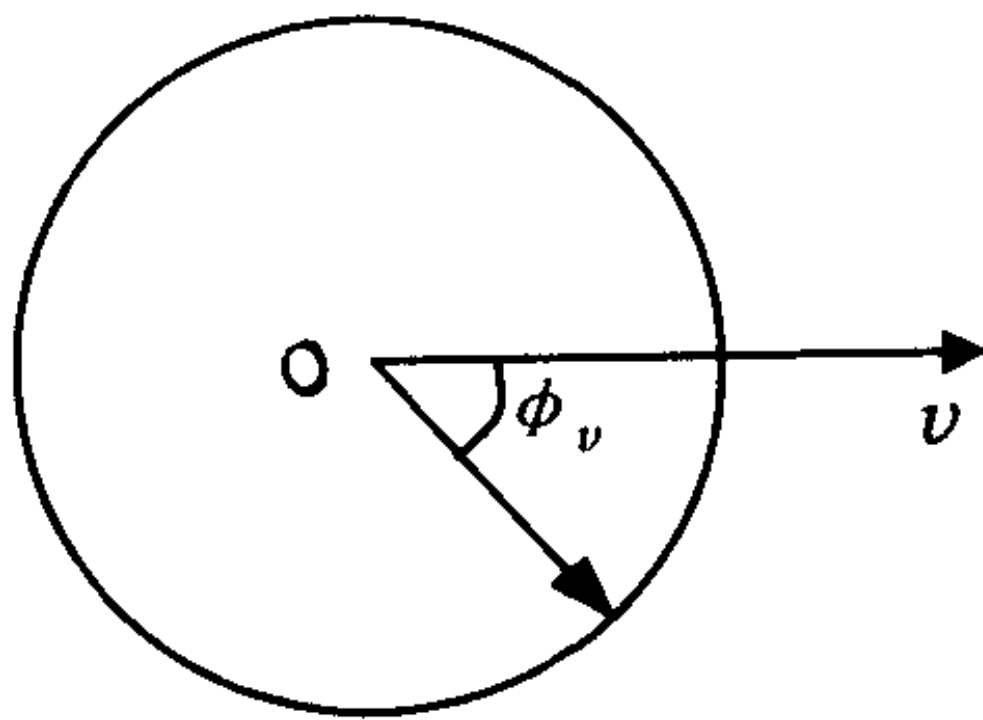


图 10-2

3. [答] 本题答案为(A,B,C)。

由两个简谐振动合成理论知:

两个同方向、不同频率的谐振动合成后不是谐振动, 振幅大小变化, 有拍现象。

两个不同频率、相互垂直的谐振动合成后是一复杂且不稳定的运动轨迹, 不可能形成简谐振动。

A, B, C 均正确。

4. [解] 本题答案为(A, C, D)。

由谐振动运动学特征:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

得 A, C 满足条件。

另外, $x' = x - B = A \cos \omega t$ 得 D 也是谐振动。

5. [解] 本题答案为(C)。

设: $x_1 = A \cos(\omega t + \varphi_1)$

$$x_2 = A \cos(\omega t + \varphi_2)$$

由题意: 当 $x_1 = \frac{A}{2}$ 时, 也有 $x_2 = \frac{A}{2}$ 。

但运动方向相反, 即

$$\omega t + \varphi_1 = \frac{\pi}{3} \quad \text{时}$$

应有

$$\omega t + \varphi_2 = -\frac{\pi}{3}$$

故

$$\Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1| = \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{合振幅: } A' = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2 \cos \frac{2}{3}\pi} = A$$

选 C。

6. [解] 本题答案为(B,C)。

由 $V_m = A\omega$

$$\text{得} \quad \omega = \frac{V_m}{A} = \frac{3 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-2}} = \frac{3}{2} \text{ s}^{-1}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4}{3}\pi (\text{s})$$

由题意得

$$\varphi_v = 0$$

故

$$\varphi_0 = \varphi_v - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$a_m = A\omega^2 = 2 \times 10^{-2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4.5 \times 10^{-2} (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})$$

选 B,C。

7. [解] 本题答案为(D)。

由

$$A = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2 \cos \Delta\varphi}$$

得

$$\cos \Delta\varphi = -\frac{1}{2}$$

即
$$\Delta\varphi = \pm \frac{2}{3}\pi$$

选 D。

8. [解] 本题答案为(C)。

由拍频公式: $\nu = |\nu_2 - \nu_1|$

有
$$2 = |500 - \nu_c|$$

$$3 = |495 - \nu_c|$$

可得 $\nu_c = 498\text{Hz}$

选 C。

二、填空题

1. 已知简谐振动曲线如图 10-3 所示, 则振动方程为 $x =$ _____。

2. 已知简谐振动曲线如图 10-4 所示, 则振动方程为 $x =$ _____。

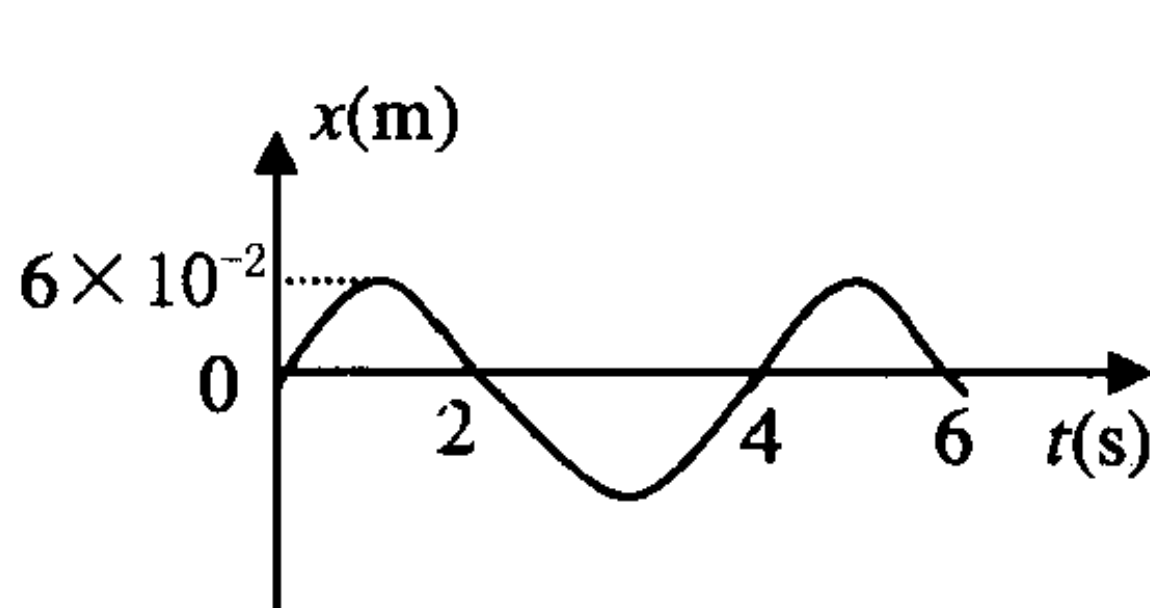


图 10-3

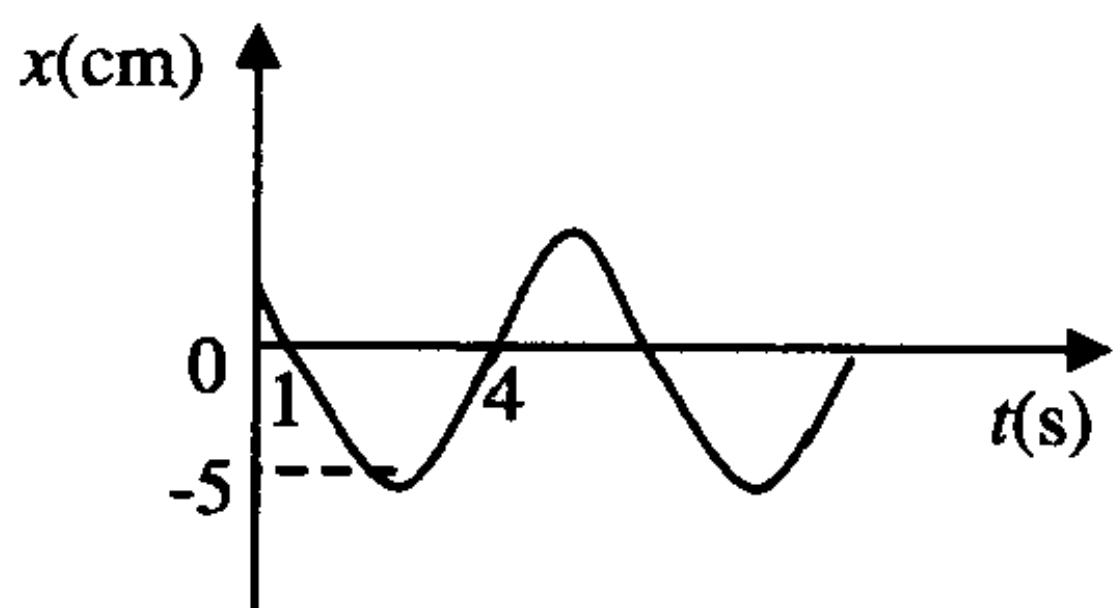


图 10-4

3. 物体的振动方程为 $x = 1 \times 10^{-2} \cos(8\pi t - \frac{\pi}{3})$ (SI), 则该振动的频率 $\nu =$ _____, 振动速度的最大值 $V_m =$ _____, 振动速度的初相位 $\varphi =$ _____。

4. 光滑斜面上置一弹簧振子如图 10-5 所示, 坐标原点选在平衡

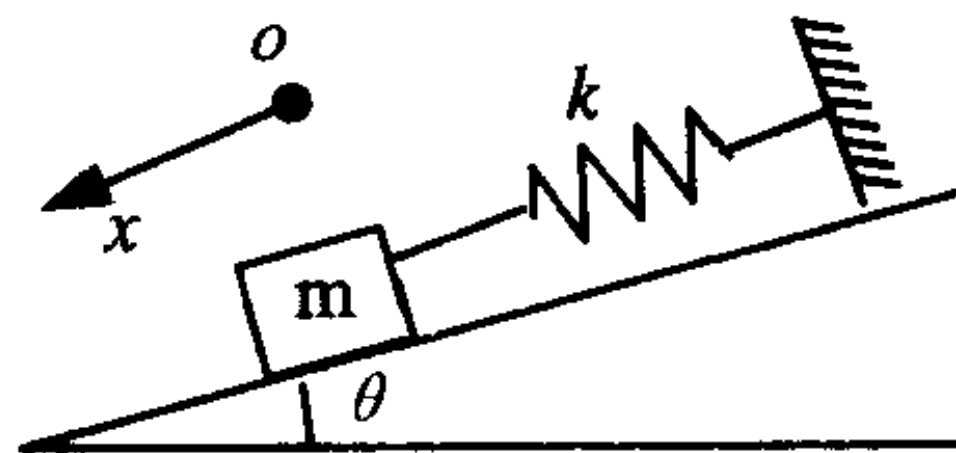


图 10-5

位置,当物体坐标为 x 时,该物体在斜面方向所受的合外力 $F =$ _____,系统的振动势能 $E_P =$ _____。

5. 两个振动方程分别为

$$x_1 = 6 \times 10^{-2} \cos(8\pi t + \frac{2}{5}\pi) \quad (\text{SI})$$

$$x_2 = 8 \times 10^{-2} \cos(8\pi t + \varphi) \quad (\text{SI})$$

当 $\varphi =$ _____ 时,合振动的振幅最大,其值 $A_{\max} =$ _____,当 $\varphi =$ _____ 时,合振动的振幅最小,其值 $A_{\min} =$ _____。

6. 受迫振动是在 _____ 作用下的振动,稳态时的振动频率等于 _____ 的频率,共振是指当 _____ 时所发生的现象。

7. 两个简谐振动的振动方程分别为

$$x_1 = 3 \times 10^{-2} \cos(2\pi t + \frac{\pi}{4}) \quad (\text{SI})$$

$$x = x_2 = 4 \times 10^{-2} \cos(2\pi t + \frac{3\pi}{4}) \quad (\text{SI})$$

则合振动的振动方程为 _____

8. 一物体放在水平木板上,物体与板面间最大静摩擦因素 $\mu = 0.5$,当此板沿水平方向以频率 $\nu = 2 \text{ Hz}$ 作简谐振动时,要使物体在板上不发生滑动,则振幅的最大值 $A_{\max} =$ _____。

9. 已知铁路上每根铁轨长 12 m ,支撑车厢的弹簧的固有周期为 0.4 s ,当列车以 $V =$ _____ km/h 的速度运行时,车厢振动的最厉害。

填空题解答

1. [解] 由振动曲线知: $A = 6 \times 10^{-2} \text{ m}$ $T = 4 \text{ s}$

故
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2} \text{S}^{-1}$$

$t = 0$ 时 $x_0 = A\cos\varphi = 0$

得
$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

又由
$$V_0 = -A\omega\sin\varphi > 0$$

得 φ 应在第三、四象限。

取 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ (也可用旋转矢量图判断)

振动方程应为
$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = 6 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right) (\text{m})$$

2. [解] 由振动曲线可知: $A = 5\text{cm}$

$$T = 3 \times 2 = 6\text{s}$$

故
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3} \text{S}^{-1}$$

振动方程
$$x = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \varphi\right) (\text{cm})$$

将 $t = 1, x = 0$ 代入上式

得
$$\frac{\pi}{3} + \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

又由此时速度 $V < 0$ (向负方向运动)

取
$$\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

得
$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

振动方程为
$$x = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) (\text{cm})$$

或
$$x = 5 \times 10^{-2} \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) (\text{m})$$

3. [解] 已知: $\omega = 8\pi$

故
$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 4\text{Hz}$$

$$V_m = A\omega = 1 \times 10^{-2} \times 8\pi = 8\pi \times 10^{-2} \text{ms}^{-1}$$

$$\varphi_V = \varphi_0 + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

4. [解] $F = mg\sin\theta - K(x + x_0)$

物体平衡时, 有 $Kx_0 = mg\sin\theta$

所以 $F = -Kx$

$$E_P = -\int_0^x F dx = \int_0^x Kx dx = \frac{1}{2}Kx^2$$

或: 振动势能 = 重力势能 + 弹性势能

$$E_P = mgh + \frac{1}{2}K(x + x_0)^2$$

选 $x = -\frac{1}{2}x_0$ 处为重力势能零点(为什么?请自己思考)

则有 $h = -(x + \frac{1}{2}x_0)\sin\theta$

$$E_P = -mgx\sin\theta - \frac{1}{2}mgx_0\sin\theta +$$

$$\frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}Kx_0^2 + Kxx_0$$

将 $x_0 = \frac{mg\sin\theta}{K}$ 代入得

$$E_P = \frac{1}{2}Kx^2$$

5. [解] 当 $\Delta\varphi = \varphi - \frac{2}{5}\pi = 2k\pi (k = 0, \pm 1 \cdots)$ 时加强

即 $\varphi = 2k\pi + \frac{2}{5}\pi$ 时合振幅最大。

此时 $A_{\max} = A_1 + A_2 = 14 \times 10^{-2}\text{m}$

当 $\Delta\varphi = \varphi - \frac{2}{5}\pi = (2k + 1)\pi (k = 0, \pm 1 \cdots)$ 时减弱

即 $\varphi = (2k + 1)\pi + \frac{2}{5}\pi$ 时合振幅最小。

此时 $A_{\min} = |A_2 - A_1| = 2 \times 10^{-2}\text{m}$

6. [解] 周期性外力(策动力), 周期性外力, 周期性外力的频

率趋近系统的固有频率。

$$7. [\text{解}] \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{合振幅 } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi} = \sqrt{3^2 + 4^2} \times 10^{-2} = 5 \times 10^{-2}\text{m}$$

$$\begin{aligned} \text{初相位 } \tan\varphi &= \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = \\ &= \frac{3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = -7 \end{aligned}$$

$$\varphi = \arctan(-7)$$

合振动方程为

$$x = 5 \times 10^{-2} \cos[2\pi t + \tan^{-1}(-7)](\text{SI})$$

$$8. [\text{解}] \quad \omega = 2\pi\nu = 4\pi\text{s}^{-1}$$

$$a_m = A\omega^2$$

$$\text{最大静摩擦力 } f_{\#} = \mu mg$$

若要物体不发生滑动,应满足:

$$f_{\#} \geq ma_m = mA\omega^2$$

$$\text{故 } A_{\max} = \frac{f_{\#}}{m\omega^2} = \frac{\mu g}{\omega^2} = \frac{0.5 \times 9.8}{(4\pi)^2} \approx 3.1 \times 10^{-2}\text{m}$$

9. [解] 当周期性外力的频率趋近固有频率时会发生共振现象,此时车厢振动最厉害。

$$\text{即: } \frac{12}{V} = 0.4$$

$$V = \frac{12}{0.4} = 30\text{m/s} = 108\text{km/h}$$

三、回答题

1. 简谐振动方程的标准形式为 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$,

① 试说明其中三个特征量的名称及物理意义。

[答] A (振幅) 反映振动的范围, 即表示最大位移的绝对值。
 ω (圆频率) 反映振动的快慢程度。
 φ (初相位) 反映振动的初始状态。

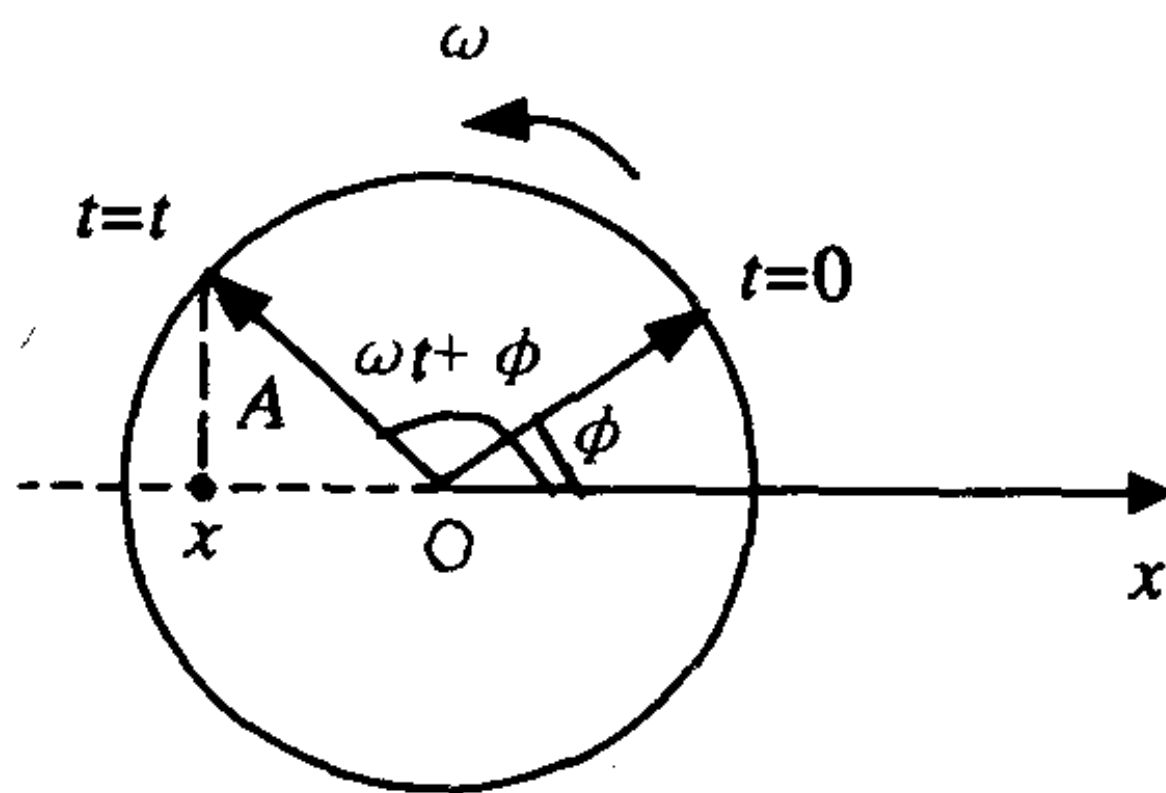


图 10-6

② 在旋转矢量图 10-6 中标出 $A, \omega, \varphi, \omega t + \varphi$ 和 x 各量, 并指出什么量在作谐振动。

[答] 旋转矢量的端点在 x 轴上的投影点在作谐振动。

四、计算题

1. 一个质量为 0.05kg 的质点沿 X 轴作简谐运动, 其运动方程为 $x = 0.06\cos(5t - \frac{\pi}{2})$ (SI), 试求:

- ① 质点在起始位置时所受的力;
- ② 在 π 秒末的位移、速度和加速度;
- ③ 动能的最大值;
- ④ 质点在何处, 其动能和势能相等。

[解] 由运动方程 $x = 0.06\cos(5t - \frac{\pi}{2})$ 得速度和加速度表达式为

$$v = \frac{dx}{dt} = -0.3\sin(5t - \frac{\pi}{2})$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -1.5\cos(5t - \frac{\pi}{2})$$

且得知: $A = 0.06\text{m}, \omega = 5\text{s}^{-1}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$\textcircled{1} \quad F = -m\omega^2 x_0$$

当 $t = 0, x_0 = 0$, 所以 $F = 0$

② $t = \pi \text{ s}$

$$x = 0.06 \cos(5\pi - \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$v = -0.3 \sin(5\pi - \frac{\pi}{2}) = -0.3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, v = -v_{\max}$$

$$a = -1.5 \cos(5\pi - \frac{\pi}{2}) = 0$$

或 $a = -\omega^2 x = 0$

③ $E_{k,\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} \times 0.05 \times (0.3)^2 = 2.25 \times 10^{-3} \text{ J}$

④ $E_k + E_p = \frac{1}{2} K A^2$

当振动动能和势能相等时,

$$E_p = \frac{1}{2} E$$

即 $\frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} K A^2$

所以 $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} A$

2. 两个同方向、同频率的简谐运动合成后,合振动的振幅为 20 cm,相位与第一振动的相位之差为 $\frac{\pi}{6}$,若第一振动的振幅为 $\sqrt{3} \times 10 \text{ cm}$,试求第二振动的振幅及第一第二振动的相位差。

[解] (方法一) 由振动矢量图解法:见图 10-7,设 $\varphi_1 = 0$,则

$$\varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{10} \text{ m}$$

而 $A = 0.20 \text{ m}$,得 $A_2 = 0.10 \text{ m}$

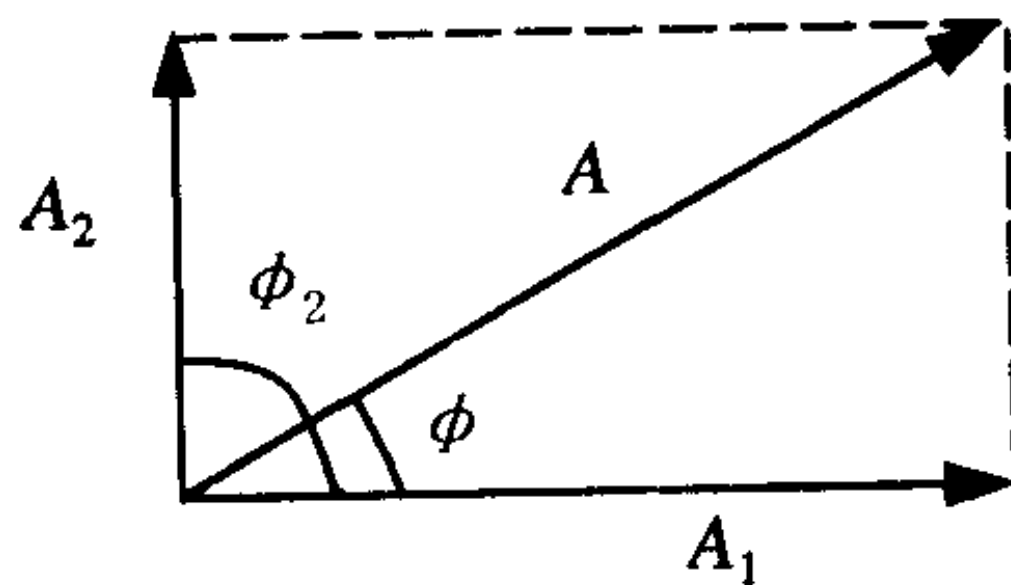


图 10-7

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$$

(方法二) 由合成振动的振幅公式, 设 $\varphi_1 = 0$

$$A_2 = \sqrt{A^2 + A_1^2 - 2AA_1\cos\varphi} = \sqrt{(0.20)^2 + (0.173)^2 - 2 \times 0.20 \times 0.173\cos\frac{\pi}{6}} = 0.10\text{m}$$

由正弦定理 $\frac{A}{\sin(\pi - \varphi_2)} = \frac{A_2}{\sin\varphi}$

将 A, A_2 及 φ 值代入, 求得 $\sin(\pi - \varphi_2) = 1$

由此得 $\pi - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ 所以, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$

3. 如图 10-8 所示, 将质量为 M 的沙盘挂在一个劲度系数为 K 的竖直轻弹簧下端, 弹簧的上端固定, 今有一质量为 m 的小球, 从离盘高为 h 处自由下落至盘中, 并和盘一起开始运动, 以此时刻作为计时起点, 并取竖直向下的方向为 y 轴正方向 (以 $m + M$ 的平衡位置为坐标原点)。

① 试证明: 该系统作简谐运动。

② 求该振动系统的圆频率、振幅和初相位。

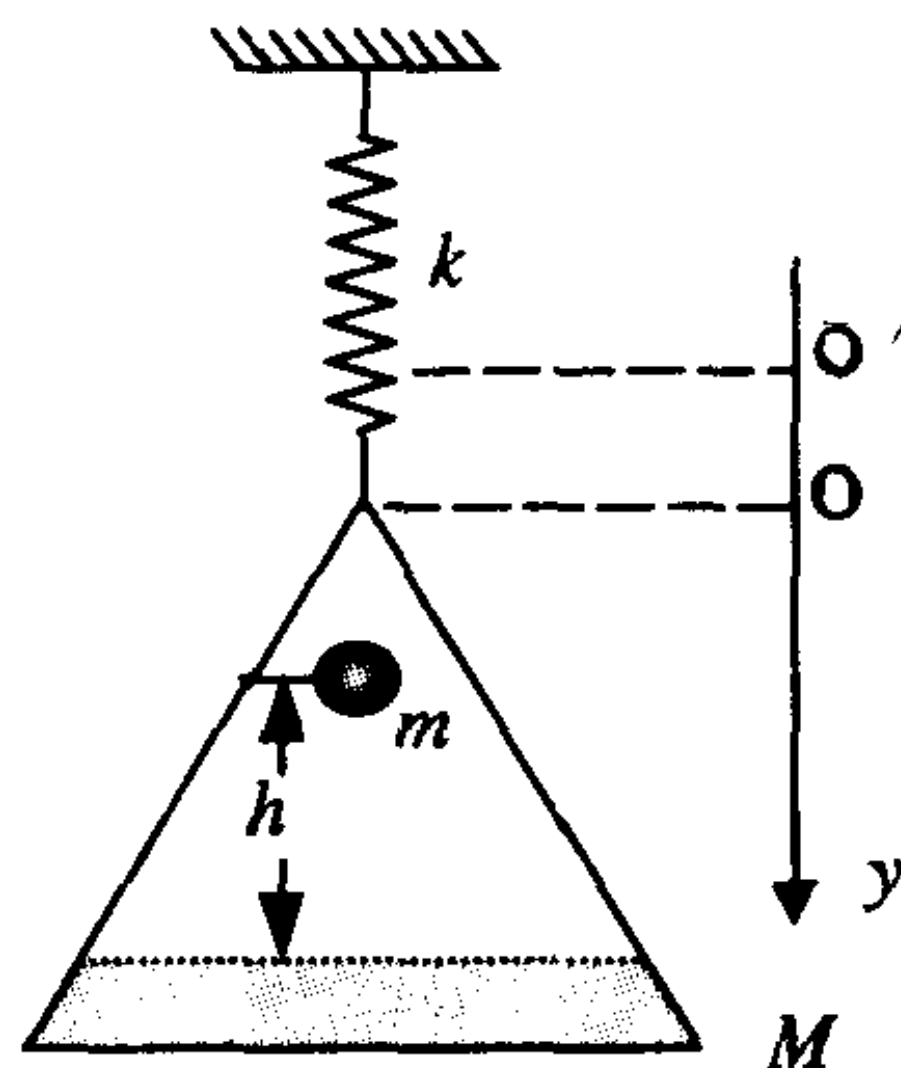


图 10-8

[解] ① 在位移为 y 处系统受力为

$$F = (M + m)g - K(y + y_1)$$

其中 y_1 为系统平衡时弹簧的伸长量。

由力的平衡条件知 $Ky_1 = (M + m)g$

故 $F = -Ky$ (满足简谐运动的动力学条件)

或 $a = \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{K}{M+m}y$ (满足简谐运动的运动学条件)

因此该系统作简谐运动

② 由上述微分方程可知

$$\omega^2 = \frac{K}{M+m}, \omega = \sqrt{\frac{K}{M+m}}$$

$t=0$ 时的初始条件为

$$y_0 = \frac{Mg}{K} - \frac{(M+m)g}{K} = -\frac{mg}{K}$$

由小球 m 自由落体遵守机械能守恒和小球与沙盘的完全非弹性碰撞(忽略重力的作用)遵守动量守恒得

$$V_0 = \frac{m}{M+m} \sqrt{2gh}$$

故
$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2}} = \frac{mg}{K} \sqrt{1 + \frac{2Kh}{(M+m)g}}$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{V_0}{\omega y_0}\right) = \arctan \sqrt{\frac{2Kh}{(M+m)g}}$$

$$\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$$

五、附加题

1. 一轻质弹簧的一端固定,另一端由跨过一滑轮的轻绳连接两个质量均为 m 的物体 A 和 B, 弹簧劲度系数为 K , 滑轮的转动惯量为 J , 半径为 R , 滑轮和轻绳之间无相对滑动, 且不计轮轴间的摩擦阻力, 系统原先处于静止状态, 现将 A, B 间的细线剪断, 以此作为计时起点, 以新的平衡位置作为 x 坐标原点, x 轴正向竖直向下(如图 10-9)。

① 从动力学角度分析 A 是否作简谐运动;

② 求系统的圆频率 ω , 振幅 A 及初相位 φ 。

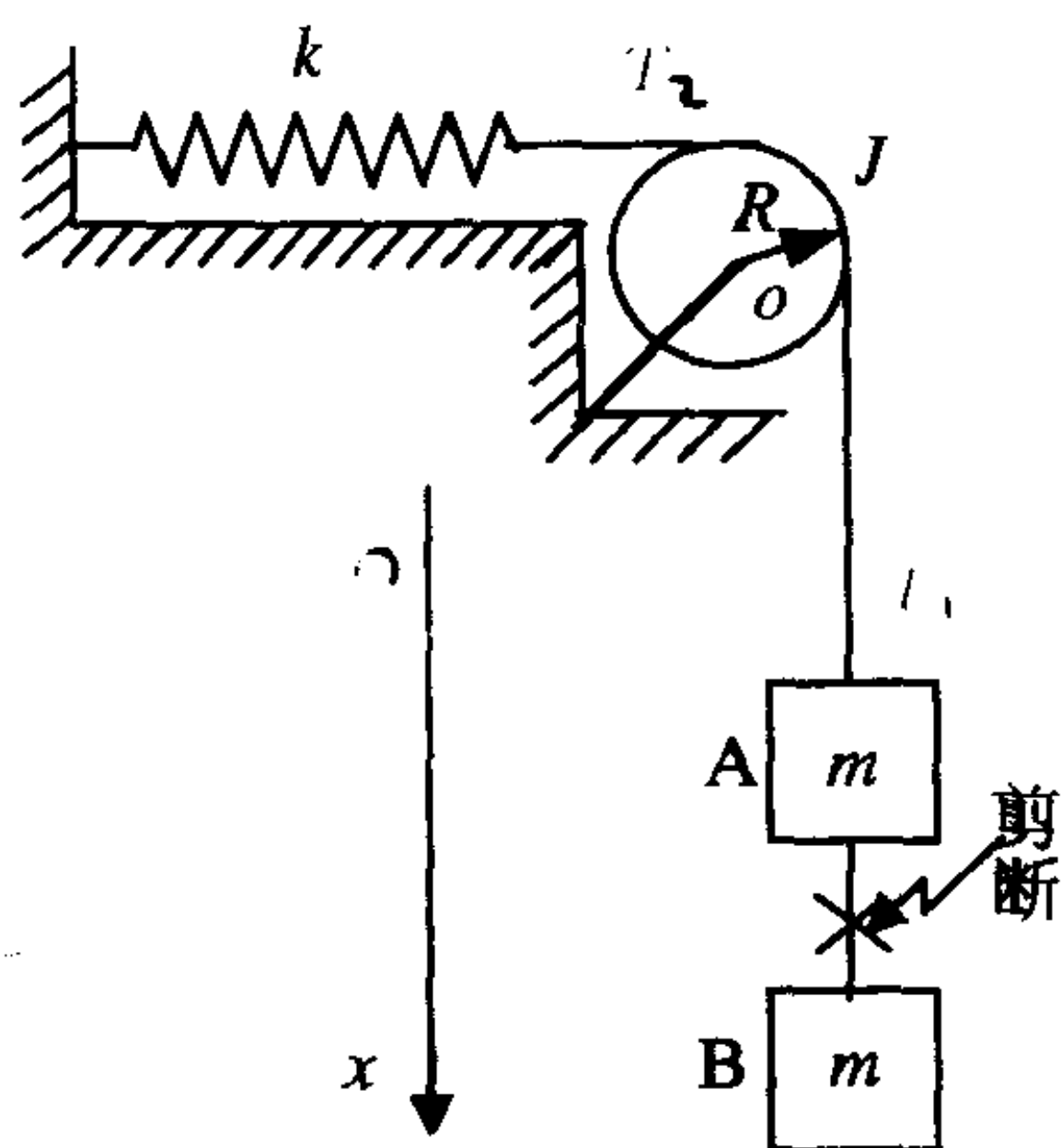


图 10-9

[解] ① 在任意时刻, 物体 A 的位置为 x 时, m 的受力方程

$$F = mg - T_1 = ma \quad (1)$$

此时滑轮满足的转动定律

$$(T_1 - T_2)R = J\beta \quad (2)$$

$$\text{角量与线量的关系} \quad a = R\beta \quad (3)$$

$$T_2 = K(x + x_1) \quad (4)$$

$$\text{其中,} \quad Kx_1 = mg \quad (5)$$

从上述等式可得

$$F = - \frac{K}{1 + \frac{J}{mR^2}} x$$

满足动力学条件, 故 A 是作简谐运动。

② 由上式得

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{K}{m + \frac{J}{R^2}} x$$

知
$$\omega^2 = \frac{K}{m + \frac{J}{R^2}}, \omega = \sqrt{\frac{K}{m + \frac{J}{R^2}}}$$

初始条件 $t = 0$ 时, $x_0 = \frac{mg}{K}, V_0 = 0$

振幅
$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2}} = x_0 = \frac{mg}{K}$$

初相位 $\varphi = \arctan\left(-\frac{V_0}{\omega x_0}\right) = \arctan(0) = 0$

第 11 章 波 动

一、选择题

1. 波由一种媒质进入另一种媒质时,其传播速度、频率、波长 ()”
- A. 都不发生变化 B. 速度和频率变,波长不变
C. 都发生变化 D. 速度和波长变、频率不变
2. 已知 $t = 0.5\text{s}$ 的波形如图 11-1 所示,波速大小 $u = 10\text{m/s}$,若此时 P 点处媒质元的振动动能在逐渐增大,则波动方程为 ()。

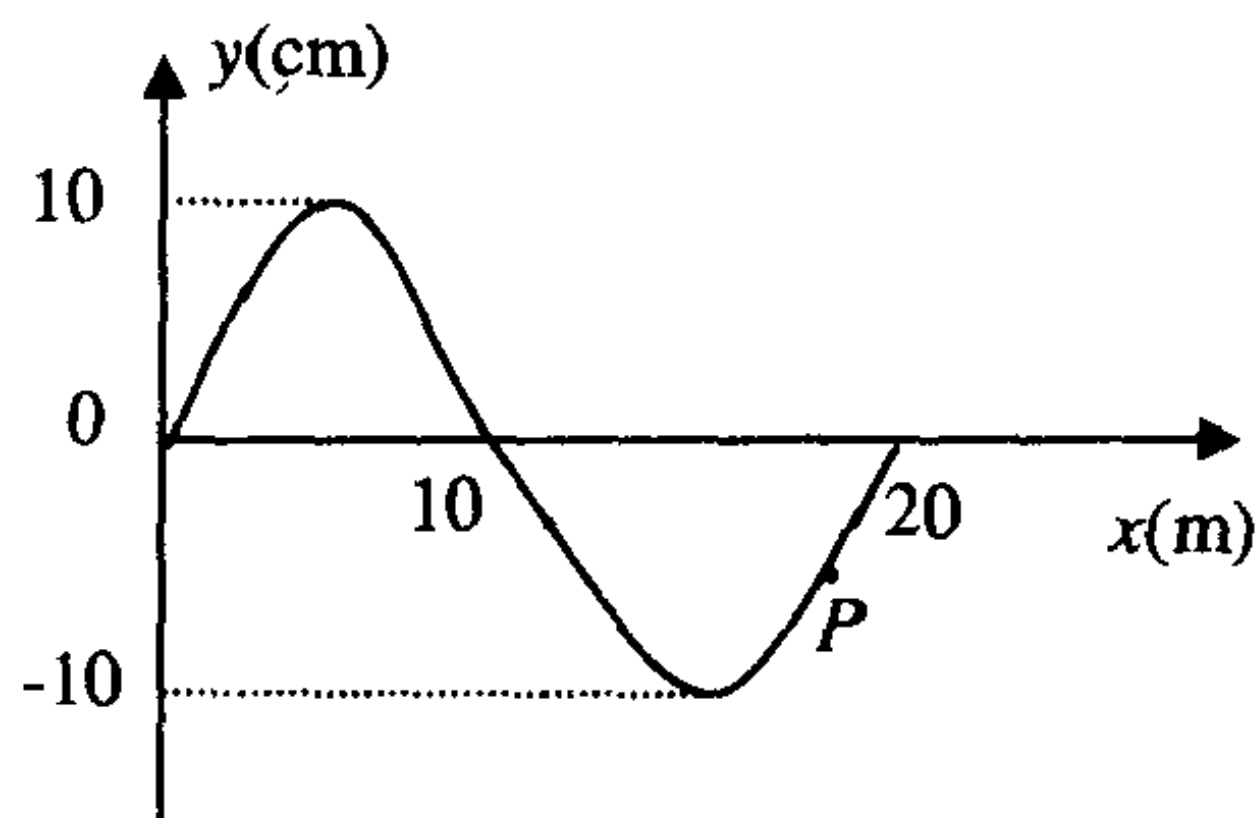


图 11-1

- A. $y = 10\cos[\pi(t + \frac{x}{10})](\text{cm})$
B. $y = 10\cos[\pi(t + \frac{x}{10}) + \pi](\text{cm})$
C. $y = 10\cos[\pi(t - \frac{x}{10})](\text{cm})$

D. $y = 10\cos[\pi(t - \frac{x}{10}) + \pi](\text{cm})$

3. 两列波在 B 点相遇, 下列说法正确的是()。

A. 在某时刻 $t = t_0$, B 点的振幅正好等于两列波振幅之和, 则这两列波是相干波

B. 两列波是相干波, 如果在某一时刻看到 B 点的质元在平衡位置上, 则 B 点一定不是干涉加强点

C. 两列波是相干波, 如果在某一时刻看到 B 点的质元距平衡位置为 y , 且 $A_{\min} < y < A_{\max}$, 那么 B 点一定即不是加强点, 也不是减弱点

D. 在 B 点, 两列波中能流密度大者, 振幅必定也大

E. 以上说法均不正确

4. 图 11-2 为一平面简谐波在 t 时刻的波形曲线, 若此时 A 点处介质质元的振动动能在增大, 则()。

A. A 点处质元的弹性势能在减小

B. B 点处质元的振动动能在增大

C. 波沿 x 轴正方向传播

D. C 点处质元的弹性势能在增大

5. 关于波长的正确说法是()。

A. 同一波线上, 相位差为 2π 的两个质元间的距离

B. 同一波线上, 振动状态相同的两点之间的距离

C. 在一个周期内波所传播的距离

D. 两个波峰(或波谷)的距离

6. 下列说法正确的是()。

A. 波速表达式 $u = \lambda\nu$, 则波源频率越高, 波速越大

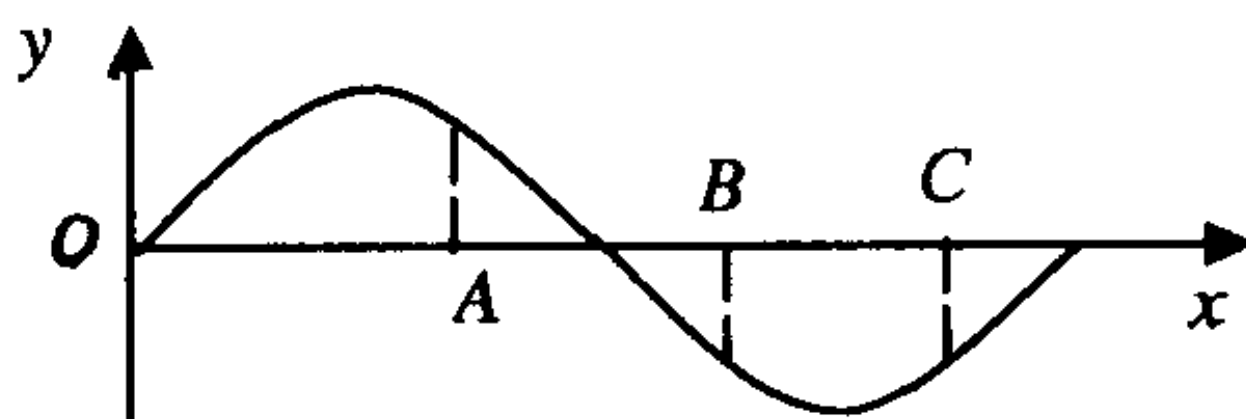


图 11-2

- B. 横波是沿水平方向振动的波,纵波是沿竖直方向振动的波
- C. 机械波只能在弹性介质(媒质)中传播,而电磁波可以在真空中传播
- D. 波源振动的频率就是波的频率,波源振动的速度就是波的传播速度
7. 驻波中相邻两波节之间各点,在振动时相同的是()。
- A. 频率 B. 相位 C. 振幅 D. 振动速度
8. 电磁波在空间传播时,某时刻在空间某点处,电场强度 E 和磁场强度 H 相同的是()。
- A. 频率 B. 相位 C. 振幅 D. 振动方向

选择题解答

1. [答] 本题答案为(D)。

波速由媒质决定,媒质改变波速要变化,频率与媒质无关,只与波源有关,故频率不变。

由 $\lambda\nu = u$ 得波长也随媒质的改变而变化。

选 D。

2. [解] 本题答案为(B)。

由 $t = 0.5\text{s}$ 的波形曲线知:

$$A = 10\text{ cm}$$

$$\lambda = 20\text{ m}$$

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{u}{\lambda} = 2\pi \frac{10}{20} = \pi\text{s}^{-1}$$

且此时 P 点质元的动能在增大,应向平衡位置靠近,下一时刻的波形曲线如图 11-3 中虚线所示。

得出此波沿 x 负方向传播,进而得出当 $t = 0.5$ 时坐标原点($x = 0$)的质元在平衡位置且向 y 的正方向运动。

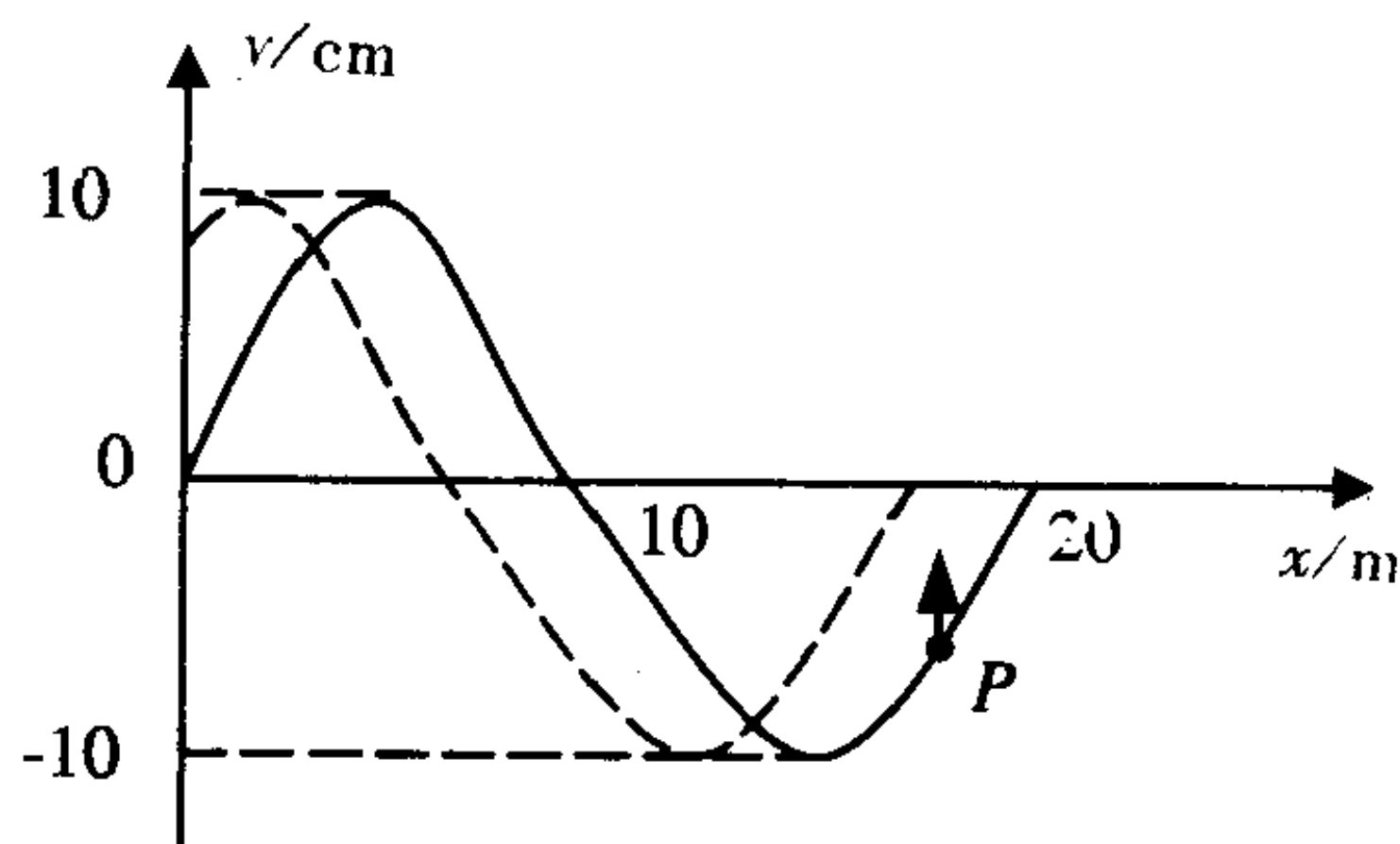


图 11-3

即
$$\omega t + \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

故
$$\varphi_0 = \frac{3\pi}{2} - \omega t = \frac{3\pi}{2} - \pi \times 0.5 = \pi$$

波动方程为
$$y = 10\cos\left[\pi\left(t + \frac{x}{10}\right) + \pi\right]$$

选 B。

3. [答] 本题答案为 (E)。

A 错, 两列非相干波合成后, 某点某时刻的振幅可以等于两分振幅之和, 如拍现象中的加强时刻。

B 错, 质元在平衡位置, 只说明位移 $y = 0$, 不能说明其振幅有多大, 故 B 点有可能是加强点。

C 错, 由 $y > A_{\min}$ 只能说明 B 点不是减弱点, 但由 $y < A_{\max}$ 不能说明 B 点不是加强点。

D 错, 能流密度正比于振幅平方和频率平方, 两列波可以频率不同, 能流密度大可以是由频率大造成的。若此问改为两列相干波中能流密度大, 振幅必定也大则为正确。

选 E。

4. [答] 本题答案为 (D)。

波动中质元的动能与势能同相位,且在平衡位置时,动、势能最大。

由题意得: A 点向平衡位置靠近,此波沿 x 负方向传播,进而可知: B 点远离平衡位置, C 点靠近平衡位置。

选D。

5. [答] 本题答案为(A,C)。

B错,应该表述为相邻两点的距离,否则可以是相距若干波长的两点。

D错原因同上。

6. [答] 本题答案为(C)。

波速只由媒质决定,与波源无关。

横波、纵波是由振动方向与波传播方向两者间的关系决定的。

只有C正确。

7. [答] 本题答案为(A,B)。驻波中相邻两波节之间各点的振幅与振动速度不相同。

8. [答] 本题答案为(A,B)。振幅不同,满足 $\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$,振动方向不同应是相互垂直。

二、填空题

1. 沿 X 轴正方向传播的平面波,波速 $u = 10 \text{ m/s}$,频率 $\nu = 5 \text{ Hz}$,振幅 $A = 0.02 \text{ m}$, $t = 0$ 时,坐标原点处媒质元的位移 $y = 0.01 \text{ m}$,速度 $\frac{dy}{dt} < 0$,则此波动方程为 $y =$ _____。

2. 已知平面简谐波的波动方程 $y = 8 \times 10^{-2} \cos(10\pi t - \frac{x}{2})$ (SI),则波长 $\lambda =$ _____,频率 $\nu =$ _____,波沿 _____ 方向传播。

3. 平面简谐波在 $t = 0$ 的波形曲线如图11-4所示,则波长

$\lambda =$ _____, O 点的振动方程 $y_0 =$ _____, 波动方程 $y =$ _____。

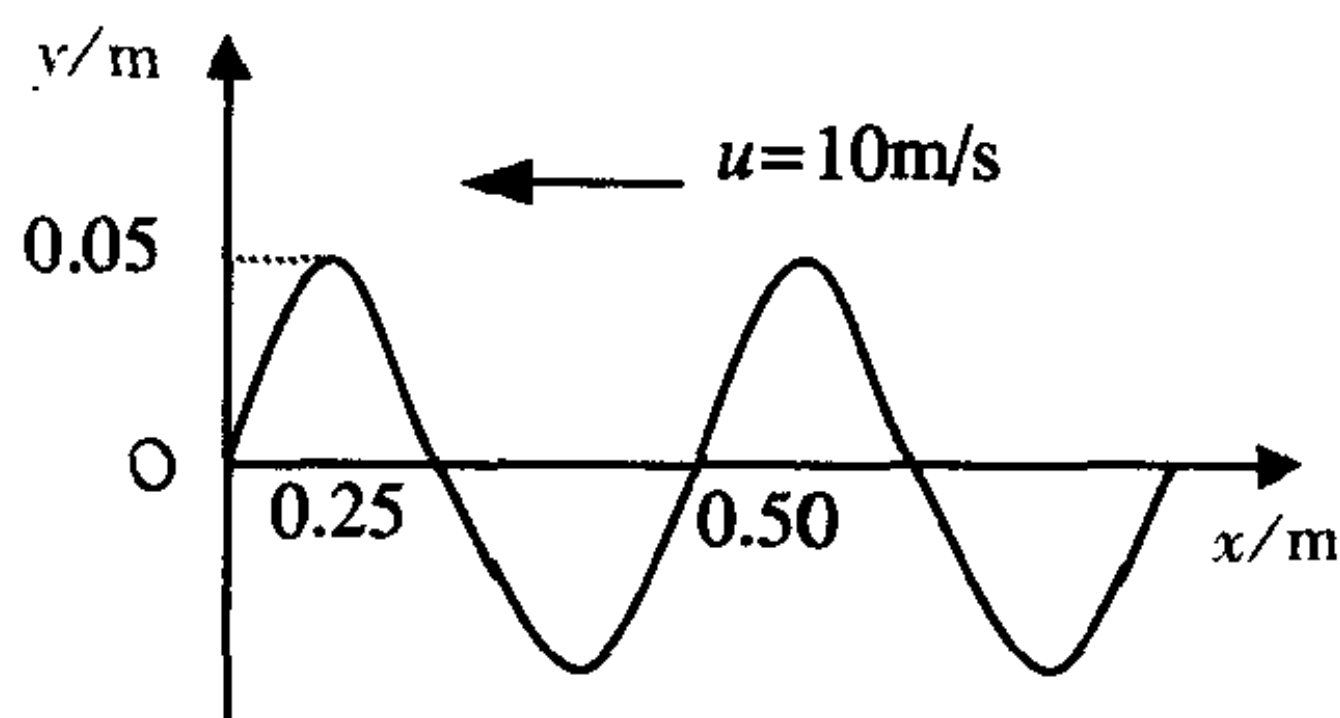


图 11-4

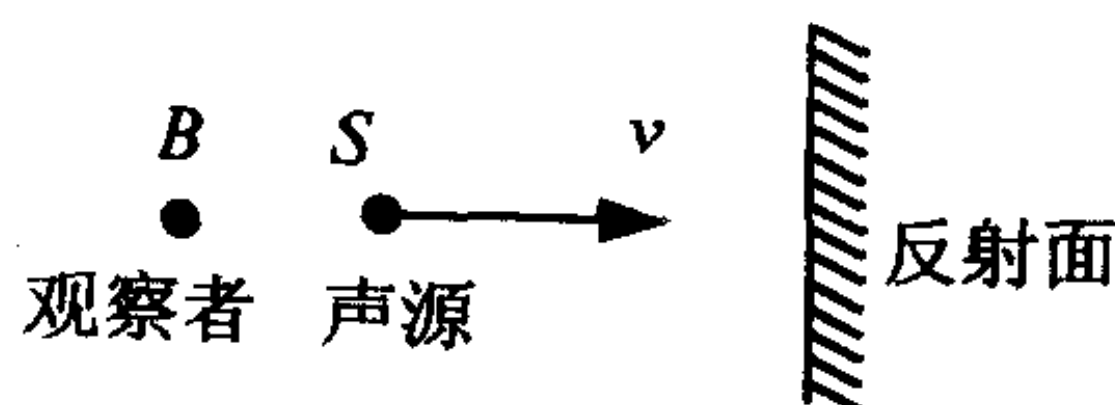


图 11-5

4. 波的相干条件是 _____ 两列相干波相遇, 干涉加强条件是 $\Delta\varphi =$ _____, 减弱条件是 $\Delta\varphi =$ _____。

5. 已知驻波方程为 $y = 0.04\cos 20x\cos 800t$ (SI), 则形成该驻波的两行波的振幅 $A =$ _____, 波速 $u =$ _____, 相邻两波节的距离 $\Delta x =$ _____。

6. 多普勒效应指的是 _____, 现有一声源, 其振动频率为 2040Hz , 以速度 $V = 0.25\text{m/s}$ 向一反射面接近, 如图 11-5 所示, 观察者 B 处测得直接由声源 S 传播过来的波的频率为 _____, 测得由反射面反射回来的波的频率为 _____。(声速 $u = 340\text{m/s}$)。

7. 证实电磁波存在的关键性实验是 _____, $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ 的量纲是 _____, 坡印廷矢量 $S =$ _____。

8. 为了保持波源的振幅不变, 需消耗 4 瓦的功率, 设波源发出

的是球面波且介质不吸收能量,则距波源 0.5m 处的能流密度 I_1 = _____,距波源 1m 处的能流密度 I_2 = _____。

9. 波源位于 $x = -1\text{m}$ 处,其振动方程为 $y = 0.5\cos(2\pi t + \frac{\pi}{3})$,此波源产生的波无吸收地分别向 x 轴正、负方向传播,波速 $u = 2\text{m/s}$,则向 x 轴正向传播的波动方程为 $y_1 =$ _____,向 x 轴负向传播的波动方程 $y_2 =$ _____。

10. 沿 x 轴正方向传播的平面简谐波,已知波长 λ ,振幅 A ,频率 ν ,且 $t = 0$ 时, O 点质元由平衡位置向位移正方向运动,此波的波动方程 $y =$ _____,若该波在 P 点处发生反射,(如图 11-6 所示),且无能量损失,则该反射波回到 O 点的振动方程为 $y_0 =$ _____,该反射波的波动方程 $y_{\text{反}} =$ _____。

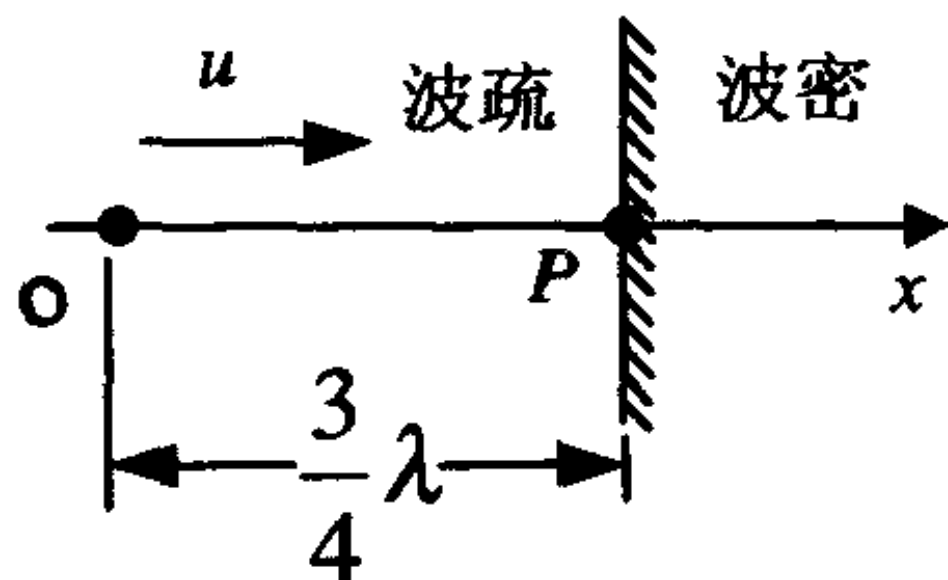


图 11-6

填空题解答

1. [解] $\omega = 2\pi\nu = 10\pi\text{s}^{-1}$

由 $t = 0$ 时, $y > 0$, 且 $\frac{dy}{dt} < 0$, 得初相位 φ 在第一象限。

由 $y_0 = 0.01\text{m}$ 且 $A = 0.02\text{m}$

有 $\cos\varphi = \frac{1}{2}$

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{3}$$

φ 在第一象限, 取 $\varphi = \frac{\pi}{3}$

波动方程 $y = 0.02\cos(10\pi t - \pi x + \frac{\pi}{3})(\text{m})$

2. [解] 波动方程写成 $y = 8 \times 10^{-2}\cos 10\pi(t - \frac{x}{20\pi})$

波动方程标准形式 $y = A\cos\omega(t \pm \frac{x}{u})$

可得 $\omega = 10\pi\text{s}^{-1}$

$$u = 20\pi\text{m/s}$$

x 项前取负号说明波沿 x 正方向传播

故 $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10\pi}{2\pi} = 5(\text{Hz})$

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{20\pi}{5} = 4\pi(\text{m})$$

3. [解] 由波形曲线可得

$$\lambda = 0.5\text{m}$$

$$A = 0.05\text{m}$$

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{u}{\lambda} = 2\pi \frac{10}{0.5} = 40\pi\text{s}^{-1}$$

坐标原点 ($x = 0$) 的质元, 在 $t = 0$ 时, 在平衡位置, 且向正方向运动 (由波形曲线的移动来判断)。

即 $\cos\varphi = 0$

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

取 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ (因为此时向正方向运动)

O 点的振动方程为

$$y_0 = 0.05\cos(40\pi t - \frac{\pi}{2})\text{m}$$

波动方程为

$$y = 0.05\cos[40\pi(t + \frac{x}{10}) - \frac{\pi}{2}] = \\ 0.05\cos(40\pi t + 4\pi x - \frac{\pi}{2})\text{m}$$

4. [答] 频率相同、振动方向相同、位相差恒定; $\Delta\varphi = 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $\Delta\varphi = (2k + 1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

5. [解] 驻波方程标准形式为

$$y = 2A \cos \omega t \cdot \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$$

故

$$A = 0.02\text{m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}\text{m}$$

$$\omega = 800\text{s}^{-1}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{400}{\pi}\text{Hz}$$

$$u = \lambda\nu = 40\text{m/s}$$

$$\text{相邻两波节的间距 } \Delta x = \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{20}\text{m}$$

6. [解] 多普勒效应是指因波源或观察者(或两者同时)相对媒质运动,而使观察者发觉波的频率有所变化的现象。

已知: 声速 $u = 340\text{ m/s}$

波源运动速度 $v = 0.25\text{m/s}$

$$\text{直接收到的频率 } \nu_1 = \frac{u}{u + v} \nu_0 = \frac{340}{340 + 0.25} \times 2040 = 2038.5\text{Hz}$$

$$\text{反射回来的频率 } \nu_2 = \frac{u}{u - v} \nu_0 = \frac{340}{340 - 0.25} \times 2040 = 2041.5\text{Hz}$$

7. [答] 赫兹实验, $LT^{-1}, E \times H$

8. [解] 已知波源发出功率 $P = 4\text{W}$

$$\text{则 } I_1 = \frac{P}{S_1} = \frac{P}{4\pi r_1^2} = \frac{4}{4\pi \times (0.5)^2} = \frac{4}{\pi} \text{J} \cdot \text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$$

$$I_2 = \frac{P}{S_2} = \frac{P}{4\pi r_2^2} = \frac{4}{4\pi \times 1^2} = \frac{1}{\pi} \text{J} \cdot \text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$$

9. [解] 沿正向传播的波动方程为

$$y_1 = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_1 \right]$$

将 $x = -1$ 代入并与该点振动方程比较

有
$$-\frac{\omega x}{u} + \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$$

即
$$\varphi_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\omega x}{u} = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi \times (-1)}{2} = -\frac{2}{3}\pi$$

$$y_1 = 0.5 \cos(2\pi t - \pi x - \frac{2}{3}\pi) \text{ m}$$

同理沿负向传播的波动方程

$$y_2 = A \cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \varphi_2\right]$$

有
$$\varphi_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\omega x}{u} = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi \times (-1)}{2} = \frac{4}{3}\pi$$

$$y_2 = 0.5 \cos(2\pi t + \pi x + \frac{4}{3}\pi) \text{ m}$$

10. [解] $t = 0$ 时, O 点质元过平衡位置且向正方向运动

$$\cos\varphi = 0$$

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

取
$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

波动方程:
$$y = A \cos(2\pi\nu t - \frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{\pi}{2}) (\text{m})$$

该波传到 P 点的振动方程为

$$y_P = A \cos(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{3}{4}\lambda - \frac{\pi}{2}) =$$

$$A \cos(2\pi\nu t - 2\pi) (\text{m})$$

在 P 点反射由于是从波疏到波密媒质的反射, 有半波损失 (即 π 相位的突变), 所以从 P 点反射后 P 点的振动方程变为

$$y_{P\text{反}} = A \cos(2\pi\nu t - 2\pi \pm \pi) (\text{m})$$

(注: 半波损失取正、负号均可, 本题取正号)

$$y_{P\text{反}} = A \cos(2\pi\nu t - \pi) (\text{m})$$

该反射波回到 O 点又要传播 $\frac{3}{4}\lambda$ 的距离, 相位落后 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \times$

$$\frac{3}{4}\lambda = \frac{3}{2}\pi$$

故反射波回到 O 点的振动方程为

$$y_0 = A\cos(2\pi\nu t - \pi - \Delta\varphi)$$

$$Y = A\cos(2\pi\nu t - \frac{5}{2}\pi)(\text{m})$$

反射波向 x 负方向传播其波动方程为

$$y_{\text{反}} = A\cos(2\pi\nu t + \frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{5}{2}\pi)(\text{m})$$

注:若半波损失取负号,反射波的波动方程应为

$$y_{\text{反}} = A\cos(2\pi\nu t + \frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{9\pi}{2})(\text{m})$$

三、回答题

1. 试说明简谐振动、平面简谐波、驻波的能量特征。

[答] 简谐振动的动能和势能随时间变化,且相互转化,但总能量保持恒定,等于 $\frac{1}{2}KA^2$ 。

平面简谐波各质元的动能和势能随时间变化,且两者同相位,其总能量随时间变化,说明能量在传播。

驻波因两列波的能量相向传播,因此能量不传播。

2. 简要说明电磁波的主要特性。

[答] 电磁波的主要特性有

(1) 波速 $u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$, 真空中的波速 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{m/s}$

2. 电磁波是横波

3. 电场强度 E 和磁场强度 H , 同相位, 即 $\sqrt{\epsilon}E = \sqrt{\mu}H$, 且相互垂直

4. 电磁波的能量密度 $S = E \times H$

四、计算题

1. 一列平面谐波在 $t = 0.1\text{s}$ 时的波形如图 11-7 所示, 此时坐标原点处质元的速度为负值, 设波速为 $u = 4\text{m/s}$ 。

① 试求:

波长 $\lambda =$ _____

周期 $T =$ _____

圆频率 $\omega =$ _____

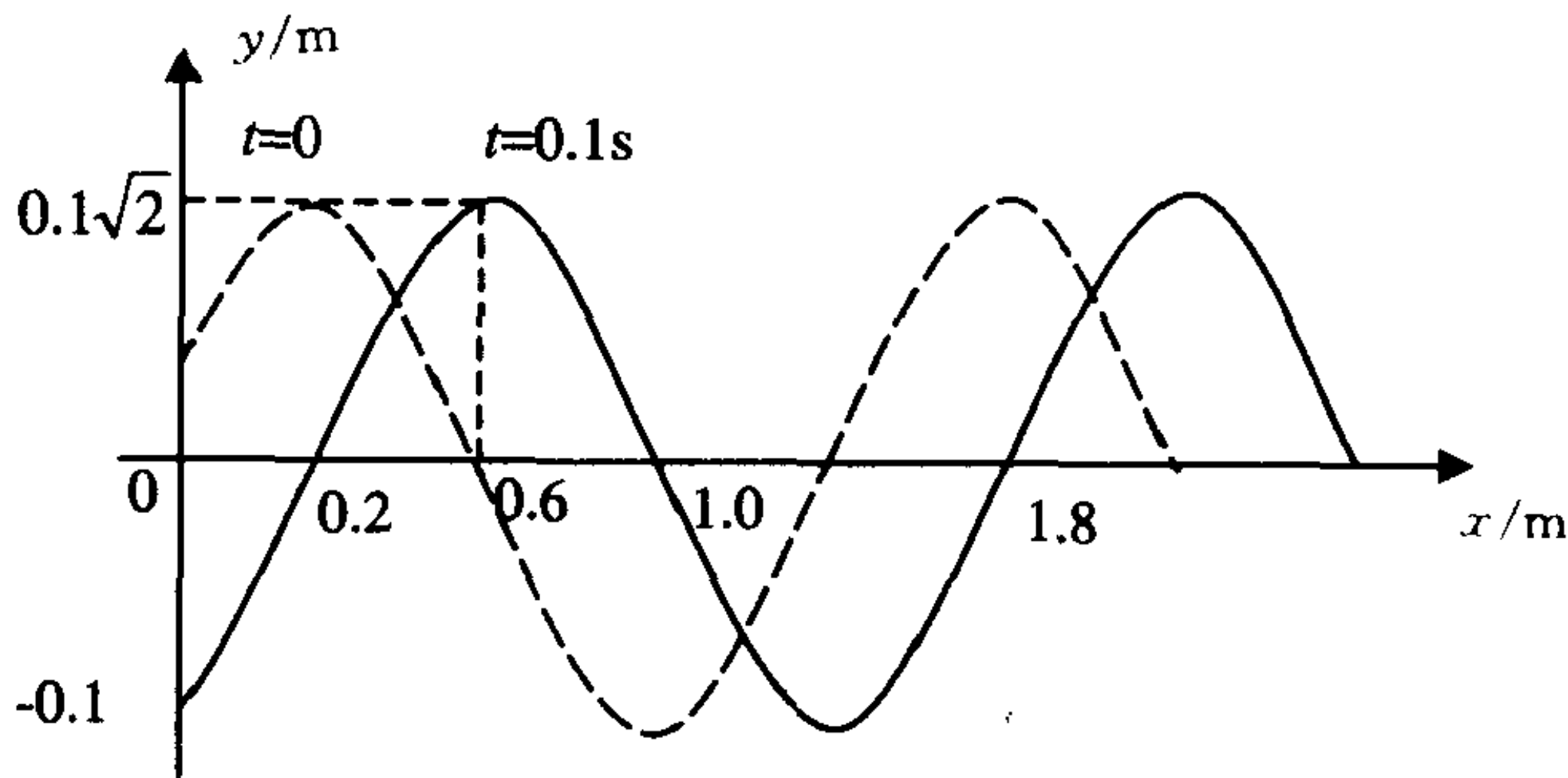


图 11-7

② 在图 11-7 中画出 $t = 0$ 时刻的波形曲线。

③ 在图 11-8 中画出坐标原点的振动曲线和旋转矢量图。

④ 该列波的波动方程为 $y = 0.1 \times \sqrt{2} \cos\left(5\pi t - \frac{5\pi}{4}x + \frac{\pi}{4}\right) \text{m}$ 。

2. 如图 11-9 所示, 两相干波源 S_1, S_2 相距为 $a = 3\text{m}$, 周期 $T = 0.01\text{s}$, 振幅分别为 $A_1 = 0.03\text{m}, A_2 = 0.05\text{m}, \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$, 且 $0 < (\varphi_2 - \varphi_1) < 2\pi$, 当两波在 P 点相遇时, 相干减弱, 在 Q 点相遇时, 相干加强; PQ 连线上各点的振幅介于加强和减弱之间。

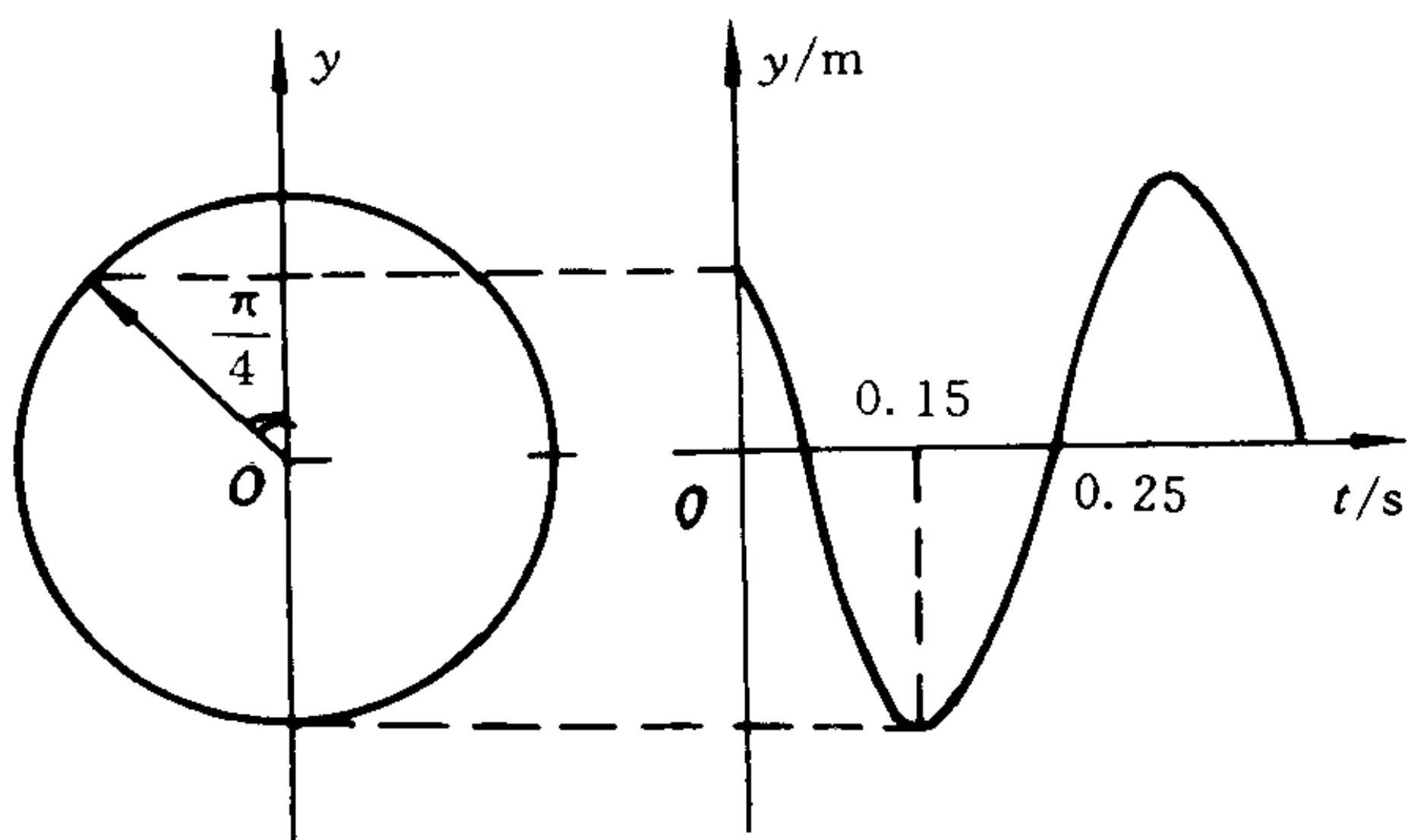


图 11-8

试求：

① 两波源的振动方程；

② 波长与波速。

[解] 两波在 P 点相干减弱, 且 $\overline{S_1P} = \overline{S_2P}$ 可知:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (2K + 1)\pi$$

由 $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi$ 只能取

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$$

所以

$$\varphi_2 = \pi + \varphi_1 = \frac{4}{3}\pi$$

① 两波源的振动方程为

$$y_1 = 0.03\cos(200\pi t + \frac{\pi}{3})\text{m}$$

$$y_2 = 0.05\cos(200\pi t + \frac{4\pi}{3})\text{m}$$

② 两波在 Q 点相遇时, 相干加强

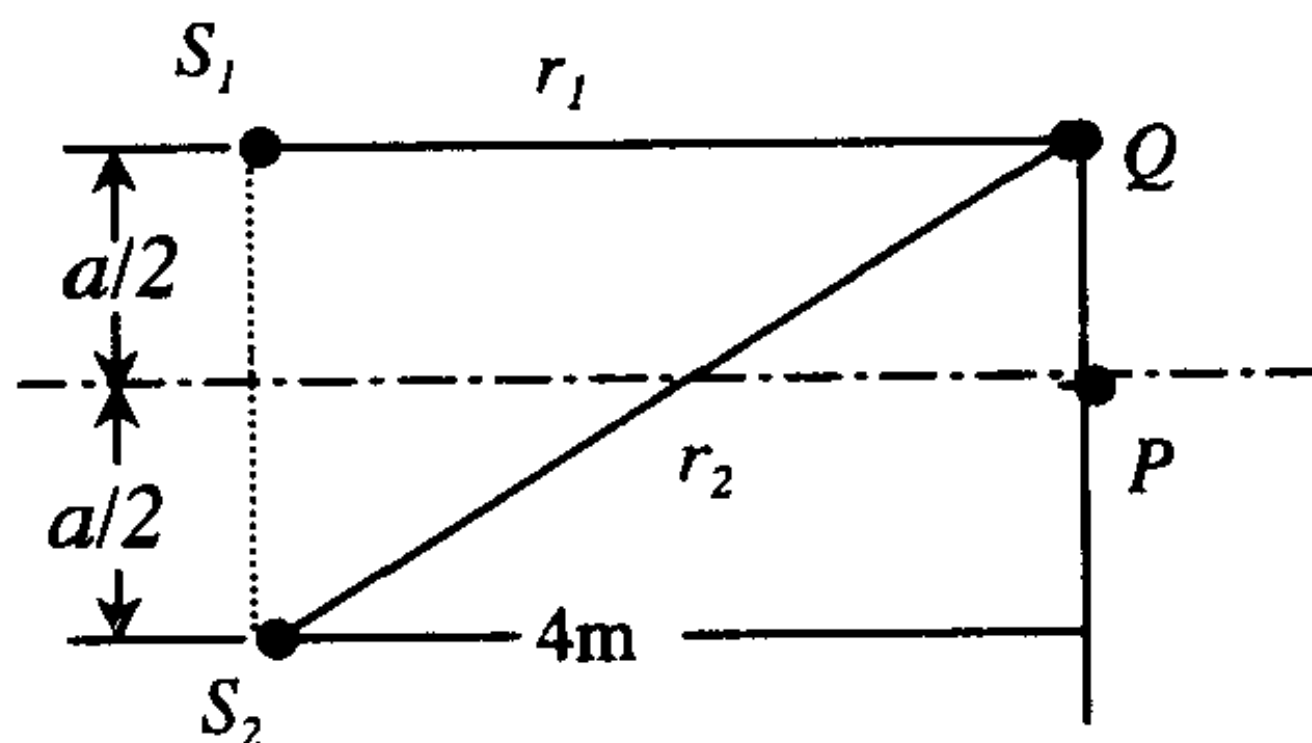


图 11-9

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) =$$

$$\pi - \frac{2\pi}{\lambda}(5 - 4) = 2K\pi$$

由于在 PQ 连线上各点介于加强, 减弱之间, 且在 P 点时, $\Delta\varphi = \pi$

因此在 Q 点, $\Delta\varphi$ 只能取 0 或 2π

$$\Delta\varphi = 0 \text{ 时, } \lambda = 2\text{m}$$

$$\Delta\varphi = 2\pi \text{ 时, } \lambda = -2\text{m (舍去)}$$

$$u = \frac{\lambda}{T} = 200\text{m/s}$$

3. 如图 11-10 有一沿 X 轴正方向传播的平面简谐波, 波的圆频率为 ω , 振幅 A , 波长 λ , OQ 相距半个波长。

① 已知 O 点的振动曲线, 如图(b)所示, 试写出坐标原点的振动方程;

② 写出沿 x 正方向传播的波动方程;

③ 当波传到 P 点时, 遇到一反射壁反射回来(有半波损失, 无吸收), 试写出反射波的波动方程。

④ 若 $L = 4\lambda$, 判断入射波和反射波在 Q 点的合振动是加强还是减弱。

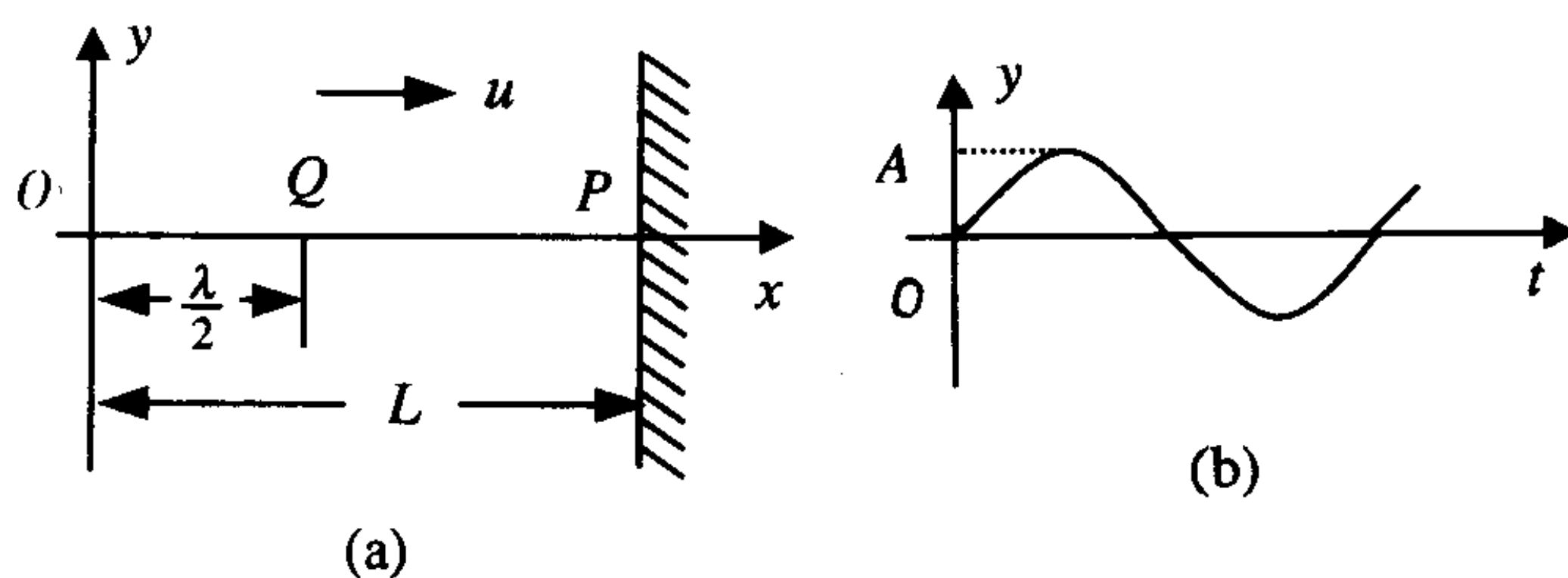


图 11-10

[解]

$$\textcircled{1} y_0 = A \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$\textcircled{2} y = A \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\pi}{2})$$

③ P 点反射后的振动方程

$$y_P = A \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}L - \frac{\pi}{2} \pm \pi) \quad (\pm \pi \text{ 表示半波损失})$$

反射波的波动方程

$$y_{\text{反}} = A \cos[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}L - \frac{2\pi}{\lambda}(L - x) - \frac{\pi}{2} \pm \pi] =$$

$$A \cos[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(2L - x) - \frac{\pi}{2} \pm \pi]$$

$$\textcircled{4} \Delta\varphi = 4\pi \frac{L - x}{\lambda} \pm \pi = 4\pi \frac{4\lambda - \frac{\lambda}{2}}{\lambda} \pm \pi = 14\pi \pm \pi = \begin{cases} 15\pi \\ 13\pi \end{cases}$$

满足减弱条件,是减弱的(即该点不振动)。

五、附加题

1. 一固定波源在海水中发出频率为 ν 的超声波,射在一迎面驶来的潜艇上反射回来,设海水中声速为 u ,潜艇速度为 v ($v < u$),试求:

① 该潜艇接收到该超声波的频率 ν_1 。

② 在波源附近另有一相对波源静止的接收器收到的发射波和反射波的频率差 $\Delta\nu$ 。

1. [解]① 已知声速为 u ,波源静止 $u_s = 0$

潜艇(接收者)速度 $u_B = v$,波源频率 $\nu_0 = \nu$

潜艇接收到的频率

$$\nu_1 = \frac{u + v}{u} \nu$$

② 潜艇将波反射回来相当于潜艇是一波源发出频率 ν_1 ,波源(潜艇)速度 $u_s = v$

接收器接收到的频率

$$\nu_2 = \frac{u}{u - v} \nu_1 = \frac{u + v}{u - v} \nu$$

发射波和反射波的频率差

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu = \frac{2v}{u - v} \nu$$

第 12 章 波动光学

一、选择题

1. 用劈尖干涉检验工件的表面,当波长为 λ 的单色光垂直入射时,观察到干涉条纹如图 12-1 所示,图中每一条条纹弯曲部分的顶点恰好与右边相邻的直线部分相切,由图可判断出工件表面()。

- A. 有一凹陷的槽,深为 $\frac{\lambda}{4}$
- B. 有一凹陷的槽,深为 $\frac{\lambda}{2}$
- C. 有一凸起的梗,高为 $\frac{\lambda}{2}$
- D. 有一凸起的梗,高为 $\frac{\lambda}{4}$

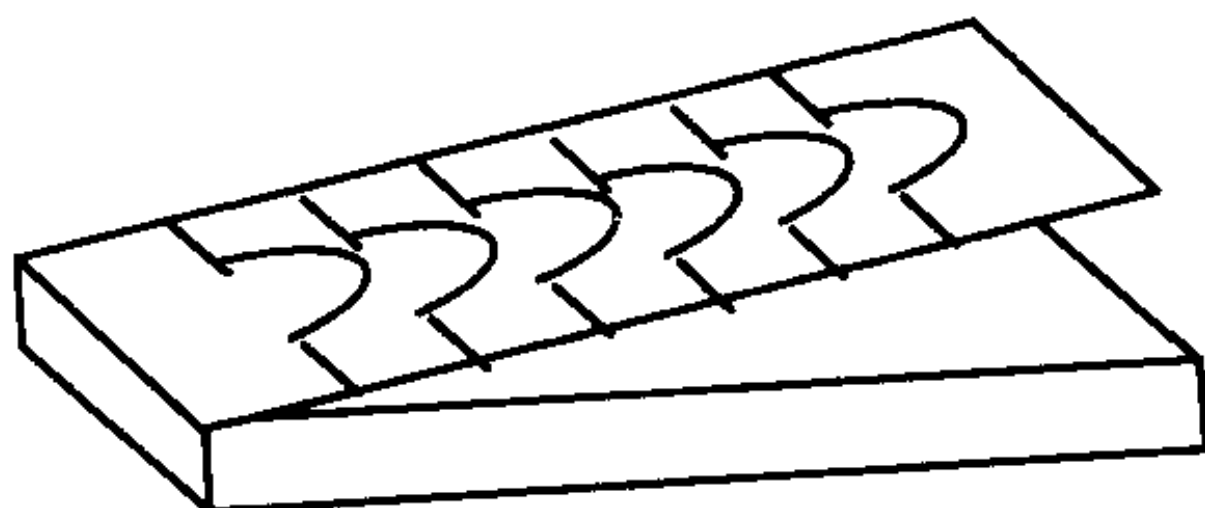


图 12-1

2. 严格地讲,空气折射率大于 1,因此牛顿环实验中若将玻璃夹层中的空气逐渐地抽去而成为真空时,牛顿环条纹将()。

- A. 变大
- B. 缩小
- C. 不变
- D. 消逝

3. 月球距地面约 $3.86 \times 10^8 \text{m}$,月光的中心波长 $\lambda = 550 \text{nm}$,若用直径 $D = 5.0 \text{m}$ 的天文望远镜观察月球,则所能分辨月球表面上的最小距离为()。

- A. 1.2m
- B. 5.1m
- C. 51.2m
- D. $5.1 \times 10^4 \text{m}$

4. 图 12-2 中所示的 X 射线束不是单色的,而是含有从 $0.90 \times 10^{-10} \text{m}$ 到 $1.40 \times 10^{-10} \text{m}$ 范围内的各种波长,晶体的晶格常数 $d = 2.75 \times 10^{-10} \text{m}$,则可以产生强反射的 X 射线的波长是()。

- A. $1.38 \times 10^{-10} \text{m}$ B. $1.19 \times 10^{-10} \text{m}$
 C. $0.95 \times 10^{-10} \text{m}$ D. $0.92 \times 10^{-10} \text{m}$
 E. 以上均不对

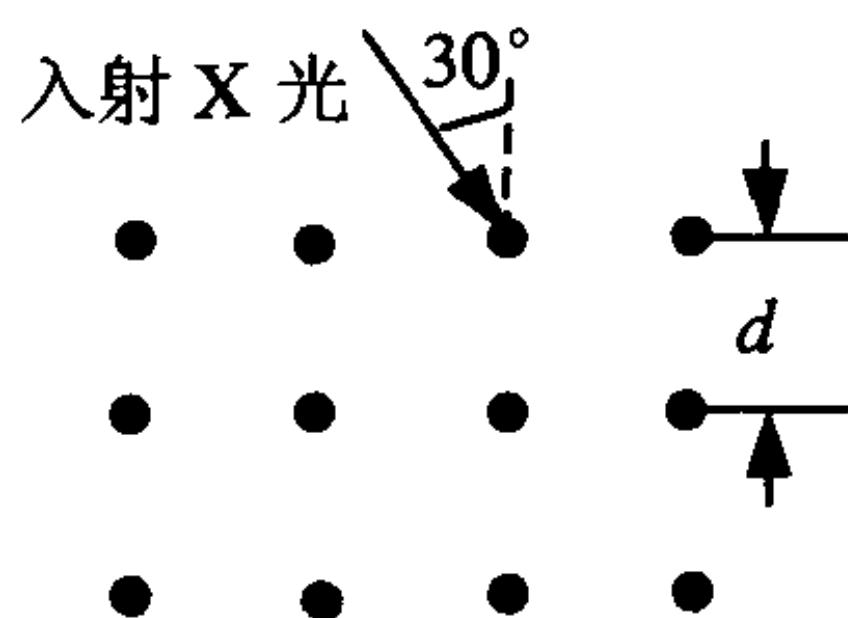


图 12-2

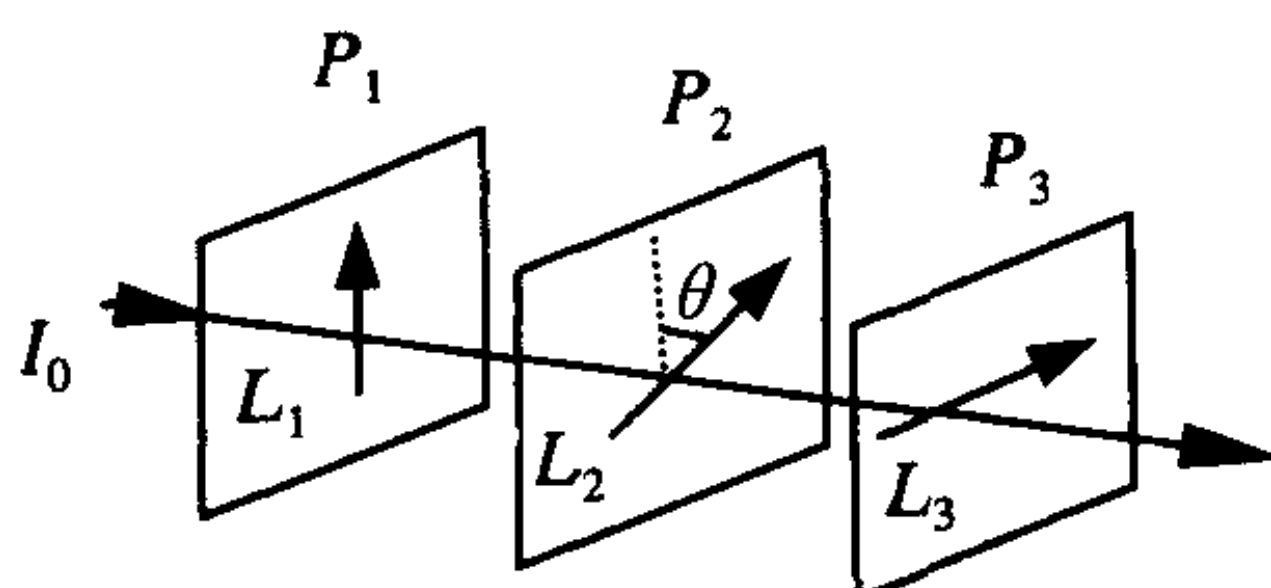


图 12-3

5. 三块偏振片 P_1, P_2, P_3 平行地放置(图 12-3), P_1 的偏振化方向和 P_3 的偏振化方向相互垂直, 一束光强为 I_0 的平行单色自然光垂直地射到偏振片 P_1 上, 若每个偏振片吸收 10% 的人射光, 当旋转偏振片 P_2 时(保持其平面方向不变), 则通过偏振片 P_3 的最大光强为()。

- A. $0.091I_0$ B. $0.101I_0$ C. $0.0455I_0$ D. $0.364I_0$

6. 如图 12-4 所示, 在单缝衍射实验中, 若将缝宽 a 稍稍加大些, 同时使单缝沿 y 轴方向向上作微小位移, 则屏 C 上的中央亮纹将()。

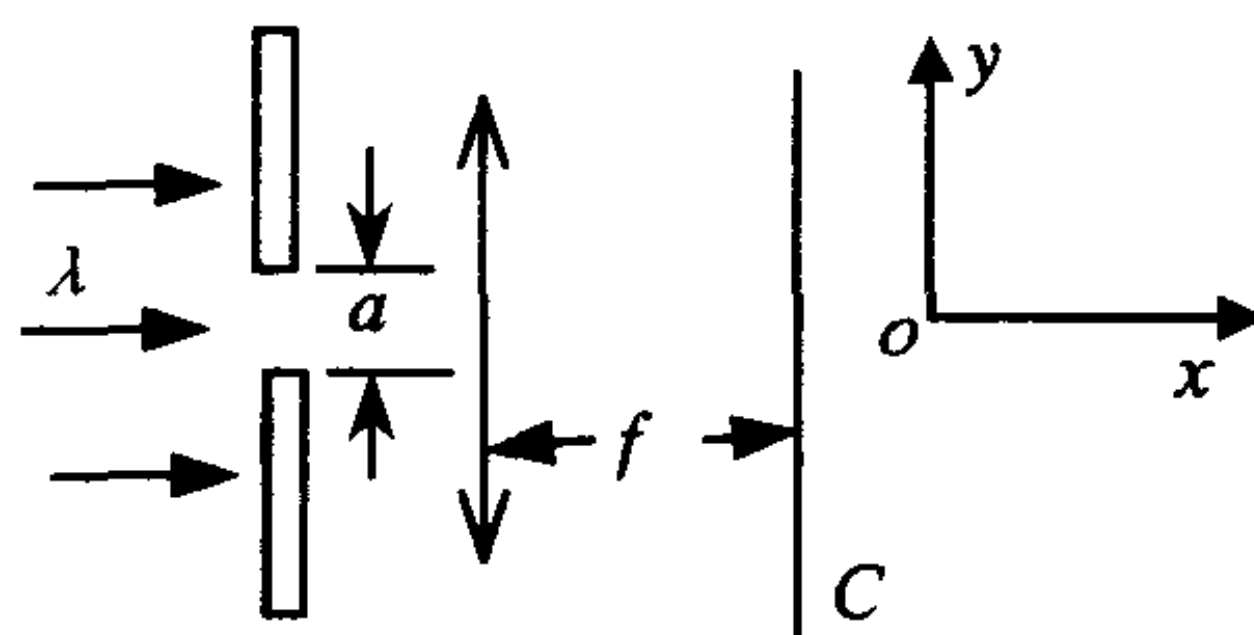


图 12-4

- A. 变窄, 同时向上移
 B. 变窄, 同时向下移
 C. 变宽, 同时向上移
 D. 变宽, 同时向下移
 E. 变窄, 不移动
 F. 变宽, 不移动

7. 光的偏振现象证实了()。

A. 光的波动性 B. 光是电磁波

C. 光是横波 D. 光是纵波

8. 当一束自然光以布儒斯特角从一种媒质射向另一种媒质的界面, 则()。

A. 反射光和折射光均为完全偏振光

B. 反射光和折射光均为部分偏振光

C. 反射光是完全偏振光, 而折射光是部分偏振光

D. 反射光是部分偏振光, 而折射光是完全偏振光

9. 用一束平行白色光垂直照射在单缝上, 则在屏中央附近出现()。

A. 中央亮纹为白色, 两边对称分布着由紫到红的彩色光谱

B. 中央亮纹为白色, 两边对称分布着由红到紫的彩色光谱

C. 中央亮纹为白色, 两边对称分布着黑白相间的条纹

D. 不出现条纹, 因为白光是复合光

选择题解答

1. [答] 本题答案为(C)。

同一级条纹对应的膜厚是相同的且相邻两亮纹对应的厚度差

$$\Delta e = \frac{\lambda}{2n_2}。$$

工件表面为空气劈尖的下表面, 条纹向右弯曲, 故应为凸起的梗(如图 12-5 所示)。

因为弯曲条纹的顶点恰好与右边条纹相切, 故梗高为 $\frac{\lambda}{2}$ 。

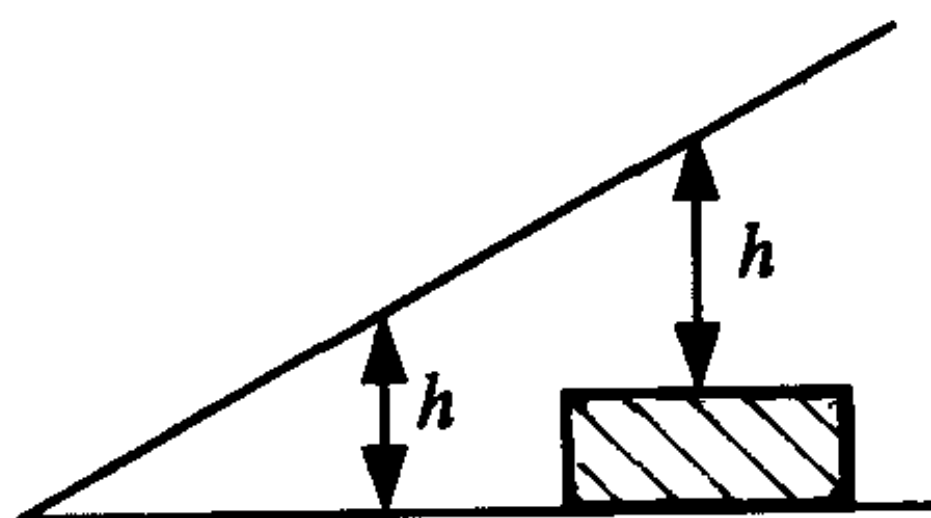


图 12-5

2. [答] 本题答案为(A)。

光程为 nr , 当空气逐渐地抽为真空时, 折射率 n 变小了, 要保

持光程差不变,玻璃夹层中的厚度 r 应增大,故条纹位置要外移,牛顿环条纹变大。

3. [解] 本题答案为(C)。

$$\text{最小分辨角 } \delta\varphi = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

最小分辨距离

$$S = L\delta\varphi = 1.22 \frac{3.86 \times 10^8 \times 550 \times 10^{-9}}{5} = 51.8\text{m}$$

4. [解] 本题答案为(B,C)。

布喇格公式 $2d\sin\varphi = k\lambda$

式中 φ 为掠射角(λ 射线与晶面的夹角)

$$\varphi = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\text{得 } \lambda = \frac{2d\sin\varphi}{k} = \frac{2 \times 2.75 \times 10^{-10} \times \sin 60^\circ}{k} = \frac{4.76 \times 10^{-10}}{k} \text{m}$$

由于 $0.90 \times 10^{-10}\text{m} \leq \lambda \leq 1.40 \times 10^{-10}\text{m}$

满足条件的有

$$k = 4 \quad \lambda_1 = 1.19 \times 10^{-10}\text{m}$$

$$k = 5 \quad \lambda_2 = 0.95 \times 10^{-10}\text{m}$$

5. [解] 本题答案为(A)。

偏振片的吸收率为 10%,透光率为 90%,经过 P_1 的光强

$$I_1 = \frac{1}{2}I_0 \times 0.9 \quad (1)$$

设: P_2 与 P_1 的偏振化方向夹角为 θ ,则通过 P_2 的光强,有

$$I_2 = I_1 \cos^2\theta \times 0.9 \quad (2)$$

通过 P_3 的光强

$$I_3 = I_2 \cos^2(90^\circ - \theta) \times 0.9 \quad (3)$$

由式(1),式(2),式(3)得

$$I_3 = \frac{1}{2}I_0 \cos^2\theta \sin^2\theta \times 0.9^3$$

因为

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

所以

$$I_3 = \frac{1}{8}I_0\sin^2 2\theta \times 0.9^3$$

I_3 取极大值应有 $\sin^2 2\theta = 1$, 即 $\theta = 45^\circ$

$$(I_3)_{\max} = \frac{1}{8}I_0 \times 0.9^3 = 0.091I_0$$

6. [答] 本题答案为(E)。

由单缝衍射公式知中央亮纹的宽度

$$\Delta\varphi = \frac{2\lambda}{a}$$

当 a 变大, 中央亮纹变窄。

由于透镜的会聚作用, 中央亮纹中心应在透镜的主焦点上, 与入射光位置无关, 故中央亮纹不移动。

7. [答] 本题答案为(C)。

偏振现象是横波特有的, 光的偏振说明光波是横波。

8. [答] 本题答案为(C)。

9. [答] 本题答案为(A)。

二、填空题

1. 光在折射率为 n 的介质是走过几何路程 r , 相当于光在真空中走过了_____路程, 把它称为_____。

2. 现有频率为 ν , 初相相同的两相干光, 在均匀介质(折射率为 n) 中传播若在相遇时它们的几何路程差为 $r_2 - r_1$, 则它们的光程差为_____, 相位差为_____。

3. 相干光是指_____, 从普通光源获得相干光的方法是_____, 常用的方法有_____法和_____法两种。

4. 如图 12-6 所示, 以 $\lambda = 550 \text{ nm}$ 的单色光源 S 照射双缝, 在

O 点观察到第 7 级明条纹, 现在 S_1 缝上加盖一厚度为 $e = 9 \times 10^{-3} \text{mm}$ 的介质膜片, 在 O 点观察到 (-2) 级明条纹, 则膜片的折射率为_____。

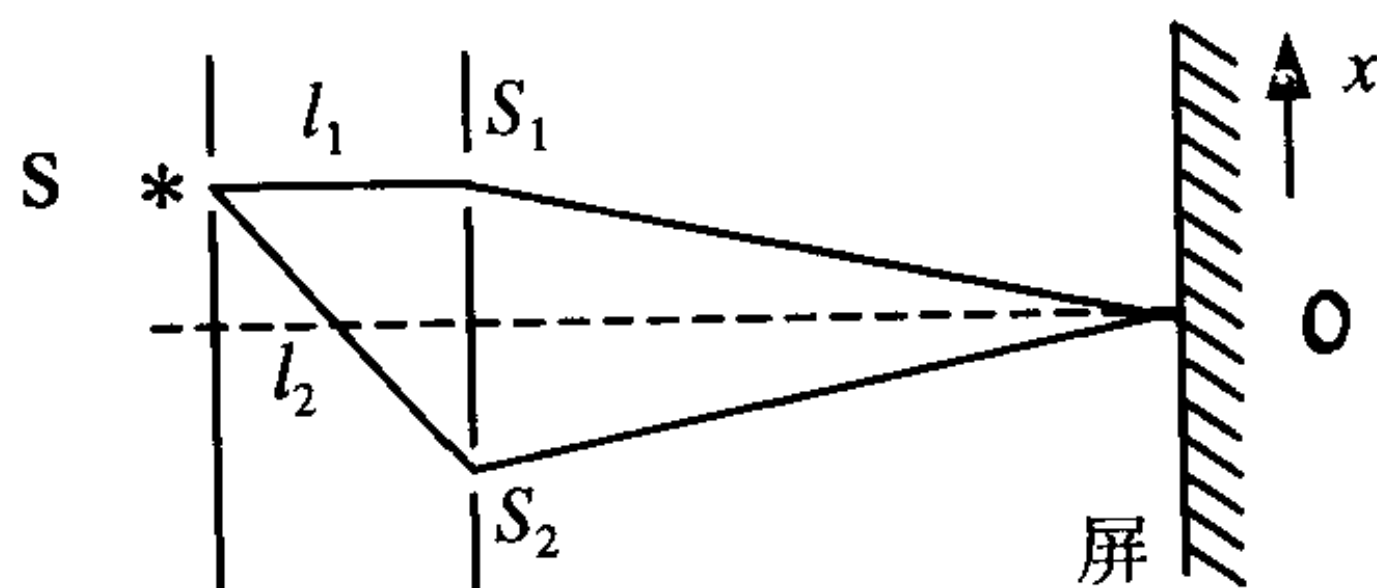


图 12-6

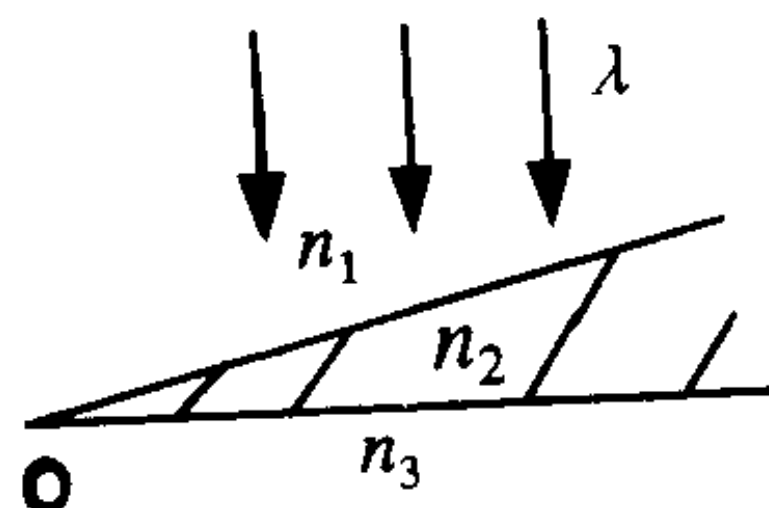


图 12-7

5. 如图 12-7 所示, 有一劈尖薄膜 (θ 很小), 在垂直入射光照射下, 若 $n_1 = n_3$, 则在反射光中观察劈尖边缘 O 处是_____纹; 若 $n_1 < n_2 < n_3$, 在反射光中观察 O 处是_____; 两相邻明条纹对应的薄膜处的厚度差 $\Delta e =$ _____; 相邻明 (或暗) 条纹间距 $l =$ _____。

6. 光的半波损失是指光线从_____介质到_____介质的界面上发生_____时, 光程有_____或相位有_____的突变。

7. 在单缝衍射中, 当衍射角 φ 满足 $a \sin \varphi = 3\lambda$ 时, 单缝的波阵面可分为_____个半波带, 若将缝宽缩小一半, 原来的第三级暗纹将变为第_____级_____条纹。

8. 要使一束光强为 I_0 的线偏振光的偏振方向转过 90° , 至少要使该光通过_____块理想的偏振片, 在此情况下, 透射光强的最大值是原光强 I_0 的_____倍, 两偏振片偏振化方向夹角 $\theta =$ _____。

9. 自然光由空气入射至薄膜表面, 入射角为 $52^\circ 45'$, 观察反射光是完全偏振光, 则折射角为_____, 反射光与折射光的夹角

为_____，膜的折射率 $n =$ _____。

10. 为了精确测定半导体元件硅(Si)片上的二氧化硅(SiO_2)膜的厚度,可将二氧化硅膜腐蚀掉一部分,使其成为劈尖,如图12-8所示,已知硅的折射率 $n_1 = 3.42$,二氧化硅的折射率 $n_2 = 1.5$,用 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ 的氦氖激光垂直照射,在劈尖最高处恰为第7条暗纹,则该膜的厚度 $e =$ _____。

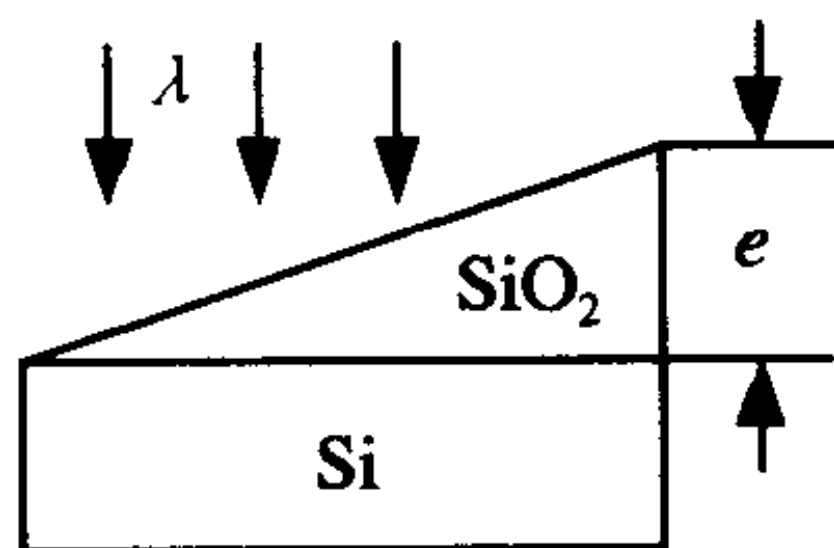


图 12-8

11. 为了增加照相机镜头的透光能力,常在镜头($n_1 = 1.52$)表面镀有一层氟化镁($n_2 = 1.38$)薄膜,若此膜适用于对胶片最敏感的黄绿光($\lambda = 550 \text{ nm}$),则此膜的最小厚度应为 $e_{\min} =$ _____。

12. 自然光入射到具有双折射的透明晶体表面上,有两条折射光,它们都是线偏振光,其一为_____光线,简称 o 光,另一为_____光线,简称 e 光。这两种光的任一光线与_____组成的平面称为该光线的主平面,其中_____光的振动方向与主平面垂直。

填空题解答

1. [答] nr 光程

2. [答] $n(r_2 - r_1)$ $2\pi \frac{n(r_2 - r_1)\nu}{C}$

3. [答] 频率相同,振动方向相同,相位差恒定的两束光;将同一点光源发出的光分为两束,使其经不同路经再相遇;分波阵面法和分振幅法。

4. [解] 未加介质膜片时 O 点光程差

$$\delta_1 = l_2 - l_1 = 7\lambda$$

加介质膜片时 O 点的光程差

$$\delta_2 = l_2 - (l_1 - e + ne) = -2\lambda$$

即

$$l_2 - l_1 - (n - 1)e = -2\lambda$$

$$(n - 1)e = 2\lambda + (l_2 - l_1) = 2\lambda + 7\lambda = 9\lambda$$

$$n = \frac{9\lambda}{e} + 1 = \frac{9 \times 550 \times 10^{-9}}{9 \times 10^{-6}} + 1 = 1.55$$

5. [解] 当 $n_1 = n_3$ 时, 若 $n_1 < n_2$ 劈尖上表面反射有半波损失, 而下表面反射无半波损失, 总光程差中有半波损失。

若 $n_1 > n_2$, 上表面无半波损失, 下表面有半波损失, 总光程差中也有半波损失。

$$\delta_1 = 2n_2e + \frac{\lambda}{2}$$

在劈尖边缘 O 处, $e = 0$, 出现暗纹。

当 $n_1 < n_2 < n_3$ 时, 劈尖的上、下表面反射时均有半波损失, 总光程差无半波损失。

$$\delta_2 = 2n_2e$$

在劈尖边缘 O 处, $e = 0$, 出现明纹。

相邻两明纹对应的厚度差应满足

$$2n_2e_{K+1} - 2n_2e_K = (k + 1)\lambda - k\lambda$$

即

$$\Delta e = e_{K+1} - e_K = \frac{\lambda}{2n_2}$$

相邻两明(或暗)条纹对应的间距应满足

$$\sin\theta = \frac{\Delta e}{l}$$

即

$$l = \frac{\Delta e}{\sin\theta} = \frac{\lambda}{2n_2\sin\theta}$$

由于劈尖 θ 很小, 有 $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$

也可写为

$$l = \frac{\lambda}{2n_2\theta}$$

6. [答] 从光疏到光密介质界面反射时;有 $\frac{\lambda}{2}$ 光程或 π 相位的突变。

7. [解] 单缝衍射的暗纹条件 $a \sin \varphi = 2k \frac{\lambda}{2}, k = \pm 1, \pm 2 \dots$

暗纹对应着偶数个半周期带(半波带), $2k$ 即为半周期带的个数。故有 6 个半周期带。

此时
$$\sin \varphi = \frac{3\lambda}{a}$$

当 $a' = \frac{a}{2}$ 时, $a' \sin \varphi = \frac{a}{2} \frac{3\lambda}{a} = \frac{3}{2} \lambda = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$ (亮纹)

此时对应 3 个(奇数)半周期带, 应出现明纹。

且为 $k = 1$, 是第 1 级明条纹。

8. [解] 至少通过 2 块偏振片, 透射最大光强为 $\frac{1}{4} I_0$, 夹角 $\theta = 45^\circ$ 。

9. [解] 由布儒斯特定律 $\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1}$

及 $i_0 + \gamma = 90^\circ$

$$\gamma = 90^\circ - i_0 = 90^\circ - 52^\circ 45' = 37^\circ 15'$$

$$n_1 = 1 \text{ (空气)}$$

$$n_2 = \tan i_0 = \tan 52^\circ 45' = 1.3$$

10. [解] 光线在劈尖上表面反射时有半波损失, 在下表面反射时也有半波损失, 总光程差无半波损失。

$$\delta = 2n_2 e$$

在最高处为暗纹, 应满足

$$2n_2 e = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$$

k 的取值应从 0 开始, ($k = 0, 1, 2 \dots$), 否则出现负膜厚(无意义)。

第 7 条暗纹对应 $k = 6$

得
$$e = \frac{(2k+1)\lambda}{4n_2} = \frac{13 \times 632.8 \times 10^{-9}}{4 \times 1.5} = 1.371 \times 10^{-6} \text{m}$$

解法二：相邻两明（或暗）条纹对应的厚度差

$$\Delta e = \frac{\lambda}{2n_2}$$

劈尖顶点 ($e = 0$) 处为明条纹，最高点处为暗纹，且为第 7 条暗纹，故从顶点到最高点应有 6.5 个条纹间隔。

$$e = 6.5 \Delta e = 6.5 \frac{\lambda}{2n_2} = 1.371 \times 10^{-6} \text{m}$$

11. [解] 光线在氟化镁薄膜的上、下表面反射时应各有一次半波损失，总光程差无半波损失

$$\delta = 2n_2e$$

要求此膜增加透光能力，其反射光应是减弱，即满足

$$\delta = 2n_2e = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

$$e = \frac{(2k+1)\lambda}{4n_2}$$

$$e_{\min} = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{550 \times 10^{-9}}{4 \times 1.38} = 9.96 \times 10^{-8} \text{m}$$

12. [答] 寻常光线，非常光线，光轴，寻常(o)。

三、回答题

1. 试简要叙述如何用一块偏振片来区分自然光、部分偏振光和完全偏振光。

[答] 将待检验光线垂直入射在偏振片上，并以入射光为轴旋转偏振片，同时观察透射光的光强，若

① 光强不变，则为自然光；

② 光强有强弱变化，但最弱处光强不为 0（即无全暗位置），则为部分偏振光；

③ 光强有强弱变化，且最弱处光强为 0（即有全暗位置），则为

完全偏振光。

四、计算题

1. 为了用光学方法精确测定某金属细丝的直径,将细丝夹在两块光学玻璃片之间,形成一个空气劈尖,如图 12-9 所示,用波长 $\lambda = 632.8\text{nm}$ 的氦氖激光垂直照射劈尖,通过显微镜观察干涉条纹,测得 $L = 20.00\text{cm}$,第 K 级明条纹与第 $K + 10$ 级明条纹的间距 $b = 80.00\text{mm}$,求细丝的直径 d 。

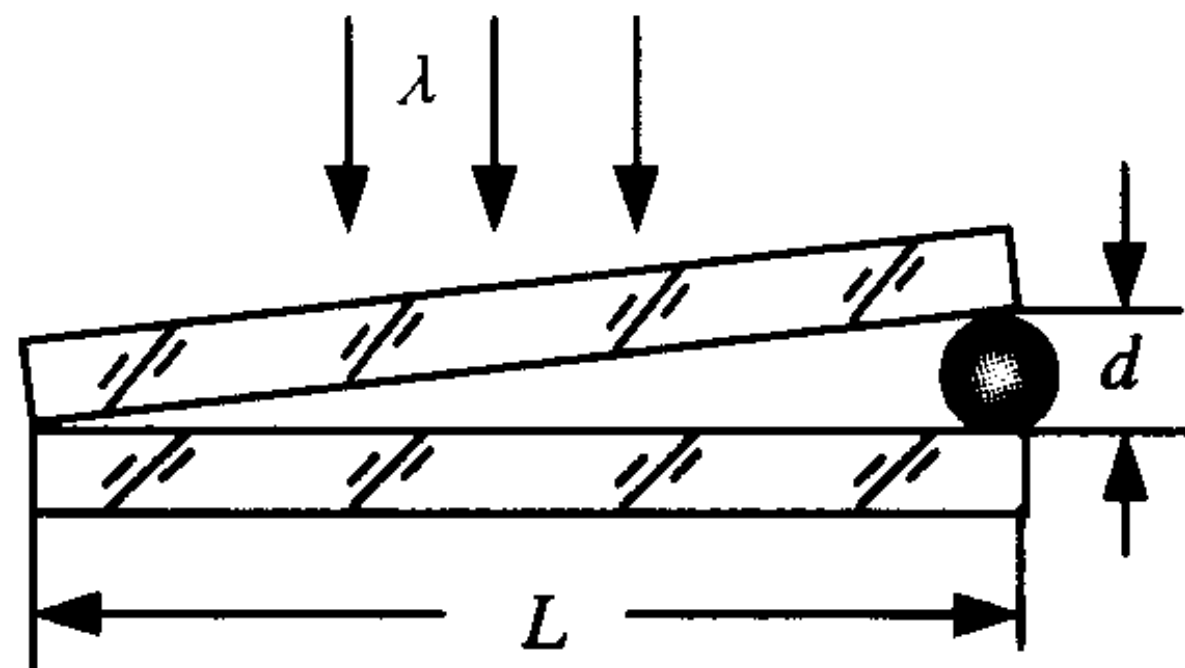


图 12-9

[解] 设相邻两条纹间距为 l ,则 $l = \frac{b}{10}$

$$l \sin \theta = \frac{\lambda}{2}$$

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{d}{L}$$

$$d = \frac{5L\lambda}{b} = \frac{5 \times 20.00 \times 10^{-2} \times 632.8 \times 10^{-9}}{80.00 \times 10^{-3}} = 7.91 \times 10^{-6} \text{m}$$

2. 一光学实验装置如图 12-10 所示。一块平面玻璃片上有一油滴,当油滴扩展成油膜时,在单色光(波长 $\lambda = 576\text{nm}$)垂直入射情况下,从反射光中观察油膜所形成的干涉条纹(油的折射率为 $n_1 = 1.60$,玻璃的折射率为 $n_2 = 1.50$)。

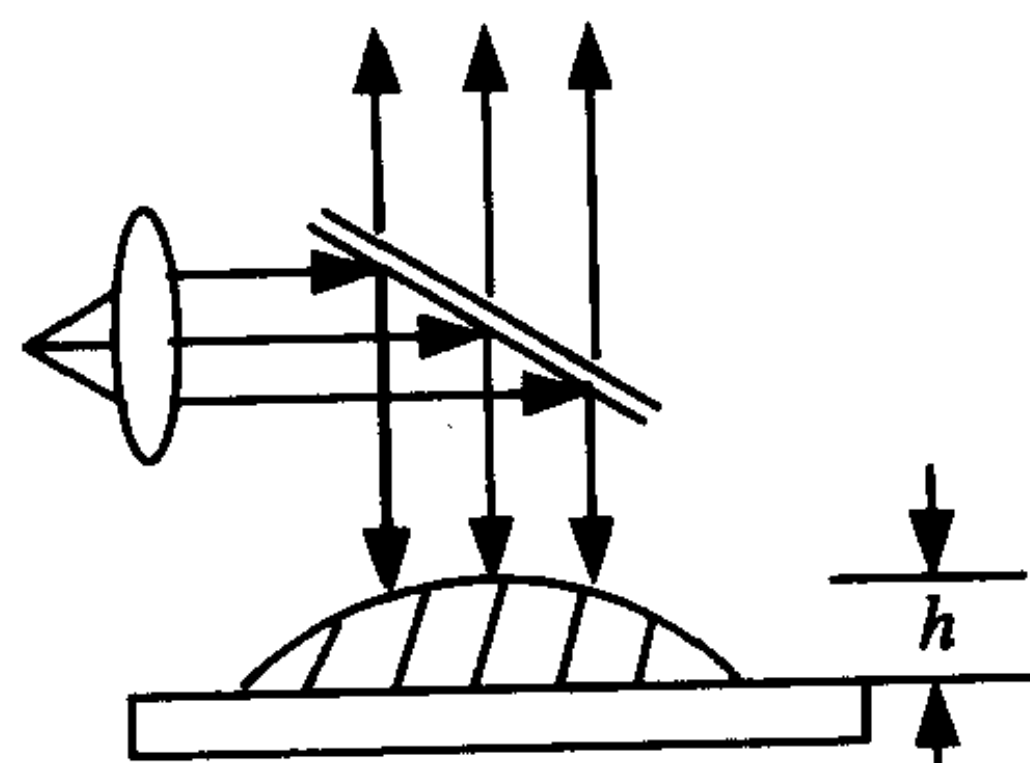


图 12-10

① 当油膜最高点与玻璃片的

上表面相距 $h = 864 \text{ nm}$ 时, 可见到几条明条纹? 各级明条纹所在处油膜的厚度分别为多大?

② 在油膜扩展过程中, 当 h 由 864 nm 逐渐减小到 810 nm , 再减小到 720 nm 的过程中, 最高点处的明暗情况如何变化?

[解] ① 由已知条件, 明纹公式为

$$2n_1e + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

最高点处, 将 $e = h$ 代入得

$$k = \frac{2n_1h}{\lambda} + \frac{1}{2} = \frac{2 \times 1.6 \times 864}{576} + \frac{1}{2} = 5.3$$

共有 $k = 1, 2, 3, 4, 5$ 的五条明纹, 对应于 k 的油膜厚度 e_k 为

$$e_k = \frac{\lambda}{2n_1} \left(k - \frac{1}{2} \right) = 180 \left(k - \frac{1}{2} \right) \text{ nm}$$

$$k = 1, e_1 = 90 \text{ nm}$$

$$k = 2, e_2 = 270 \text{ nm}$$

$$k = 3, e_3 = 450 \text{ nm}$$

$$k = 4, e_4 = 630 \text{ nm}$$

$$k = 5, e_5 = 810 \text{ nm}$$

② 当 $h = 864 \text{ nm}$ 时

$$k = \frac{2n_1h}{\lambda} + \frac{1}{2} = 5.3$$

k 为非整数, 条纹介于明暗之间, 为非明非暗条纹。

$h = 810 \text{ nm}$ 时

$$k = \frac{2n_1h}{\lambda} + \frac{1}{2} = 5 \text{ 为明纹}$$

$$h = 720 \text{ nm 时, } K = \frac{2n_1h}{\lambda} + \frac{1}{2} = 4.5 \text{ 为暗纹}$$

$h = 864 \text{ nm} \rightarrow 810 \text{ nm} \rightarrow 720 \text{ nm}$

明暗之间 \rightarrow 明纹 \rightarrow 暗纹

3. 已知: 单色平行光的波长为 $\lambda = 490 \text{ nm}$, 光栅常数 $a + b =$

$$3.0 \times 10^{-4} \text{cm}$$

① 若入射单色光与光栅平面的法线方向所成夹角为 $\theta = 30^\circ$, 在此情况下, 光栅衍射条纹中两侧的最高级次各属哪一级?

② 当单色光垂直照射在光栅上, 最多能看到第几级条纹?

③ 若光栅的透光缝的宽度 $a = 1.0 \times 10^{-4} \text{cm}$, 单色光垂直照射在光栅上, 最多能观察到的明条纹总数(包括中央明纹)为若干?

[解] ① 设衍射光线与光栅平面法线方向夹角为 φ
斜入射时的光栅公式 $(a + b)(\sin\theta \pm \sin\varphi) = \pm k\lambda$

当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\sin\varphi = 1$ 时可得最高级次。

$$\begin{aligned} \text{一侧 } k &= \frac{(a + b)(\sin\theta + \sin\varphi)}{\lambda} = \\ &= \frac{3.0 \times 10^{-6}(\frac{1}{2} + 1)}{490 \times 10^{-9}} = 9.18 \end{aligned}$$

最多可看到第九级。

$$\begin{aligned} \text{另一侧 } k &= \frac{(a + b)(\sin\theta - \sin\varphi)}{\lambda} = \\ &= \frac{3.0 \times 10^{-6}(\frac{1}{2} - 1)}{490 \times 10^{-9}} = -3.06 \end{aligned}$$

最多可看到第三级。

$$\text{② } (a + b)\sin\varphi = k\lambda$$

$$\text{当 } \varphi = \frac{\pi}{2}, \sin\varphi = 1, k = \frac{a + b}{\lambda} = \frac{3.0 \times 10^{-6}}{490 \times 10^{-9}} = 6.12$$

两侧均最多可看到第六级。

$$\text{③ 光栅公式 } (a + b)\sin\varphi = k\lambda$$

$$\text{单缝衍射的暗纹条件 } a\sin\varphi = k'\lambda$$

$$\text{由以上二式得 } \frac{a + b}{a} = k/k'$$

$$\text{将 } a + b, a \text{ 之值代入 } k = 3k', k' = 1, 2, 3 \cdots$$

可知 $k = 3, 6$ 缺级

屏上可见 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5$ 共九条明纹。

五、附加题

1. 移动通信发射台经过发射天线发出的无线电波可以直接传到手机,也可以经地面反射后传到手机,这样在某些地方可能会引起相消干涉,而使信号减弱。设一发射机和手机分别位于高度均为 50m 的高楼上(如图 12-11 所示)工作频率为 $1 \times 10^8 \text{ Hz}$,试估算可能产生相消干涉时两楼间水平地面的宽度及最大有限宽度。(无线电波在地面反射时有半波损失)

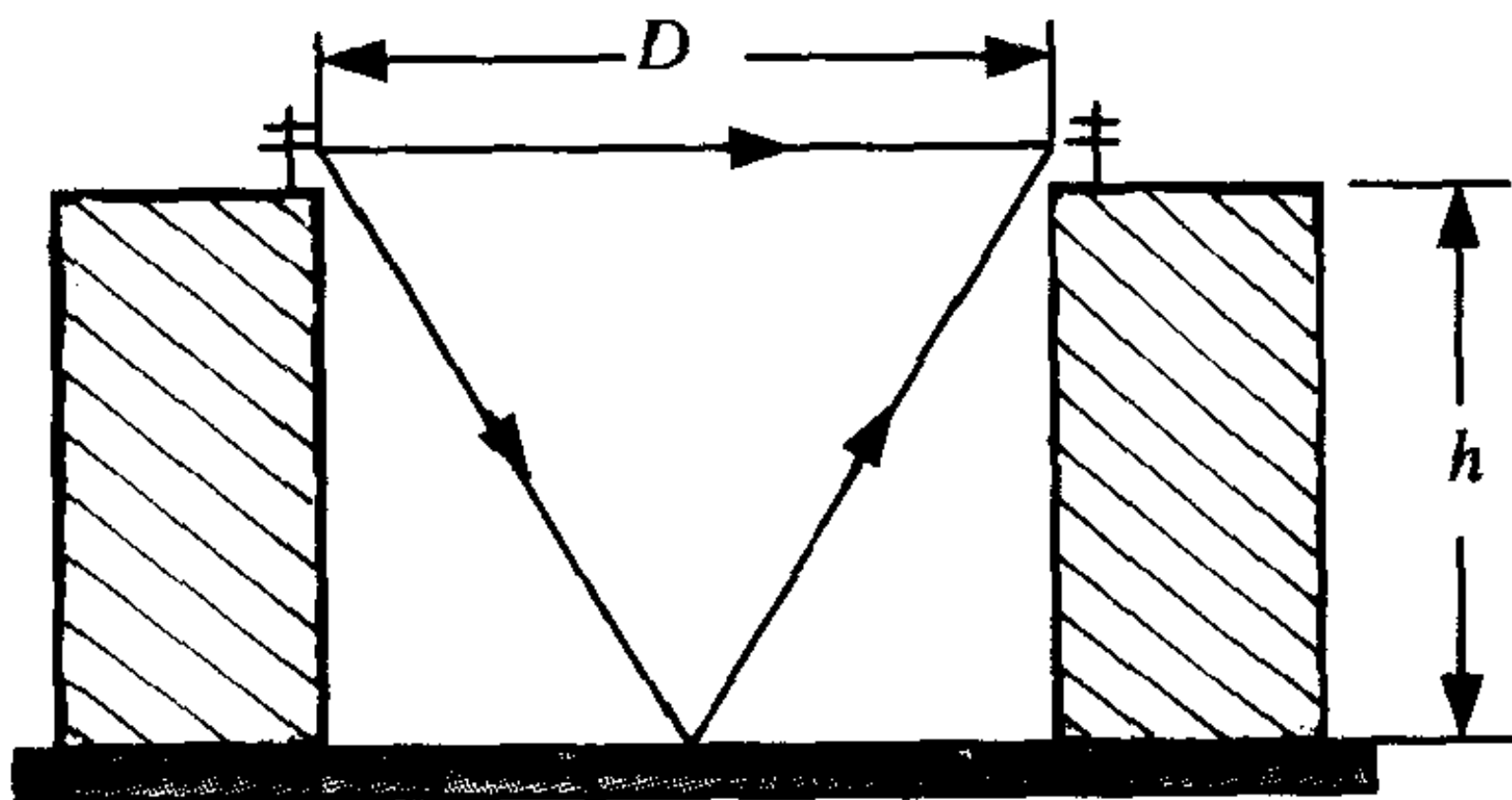


图 12-11

[解] 电磁波频率 $\nu = 10^8 \text{ Hz}$

波长 $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \times 10^8}{10^8} = 3 \text{ m}$

干涉相消条件:

$$\delta = 2\sqrt{h^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2} - D + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$$

即 $2\sqrt{h^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2} = k\lambda + D$

两边平方得

$$4h^2 + D^2 = k^2\lambda^2 + D^2 + 2kD\lambda$$

得
$$D = \frac{4h^2 - k^2\lambda^2}{2k\lambda} = \frac{10^4 - 9k^2}{6k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

当 $K = 1$ 时, D 有最大值

最大有限宽度 $D_{\max} = \frac{10^4 - 9}{6} = 1\,665 \text{ m} = 1.665 \text{ km}$

第 13 章 狭义相对论

一、选择题

1. 下列表述中正确的是()。

- A. 粒子运动的速度可以接近光速,但不能达到光速
- B. 对一般静止质量不为零的物体,以光速运动是不可能的
- C. 只有静止质量等于零的粒子,才能以光速运动
- D. 粒子在介质中的运动速度不可能大于光在该介质中的传播速度

2. K 系中发生的两个事件 P_1 和 P_2 ,其时空坐标为 $P_1(x_1, t)$, $P_2(x_2, t)$ 。若 K' 系以高速 V 相对 K 系沿 x 轴方向运动, K' 系测得这两个事件必定是()。

- A. 同时事件
- B. 不同地点发生的同时事件
- C. 既非同时,也非同地
- D. 无法确定

3. 物体相对于观察者静止时,其密度为 ρ_0 ,若物体以高速 v 相对于观察者运动,观察者测得物体的密度为 ρ ,则 ρ 与 ρ_0 的关系为()。

- A. $\rho < \rho_0$ B. $\rho = \rho_0$
- C. $\rho > \rho_0$ D. 无法确定

4. 某种介子静止时的寿命是 10^{-8}s ,如它以速度 $v = 2 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的速度运动,它能飞行的距离 s 为()。

A. $\frac{6}{\sqrt{5}}\text{m}$ B. 2m C. 10^{-3}m D. $\sqrt{5}\text{m}$

5. 一中子的静止能量为 $E_0 = 900\text{ MeV}$, 动能 $E_k = 60\text{ MeV}$, 则中子的运动速度等于()。

A. 0.30 B. 0.35 C. 0.40 D. 0.45

6. 一物体由于运动速度的加快而使其质量增加了 10%, 则此物体在其运动方向上的长度缩短了()。

A. 10% B. 90% C. $\frac{10}{11}$ D. $\frac{1}{11}$

7. 某核电站年发电量为 100 亿度, 它等于 $36 \times 10^{15}\text{J}$ 的能量。如果这些能量是由核材料的全部静止能量转化而来, 则该核电站每年所要消耗的核材料的质量为()。

A. 0.4kg B. 0.8kg C. $12 \times 10^7\text{kg}$ D. $(\frac{1}{12}) \times 10^7\text{kg}$

8. 在某惯性系中, 两个静止质量都是 m_0 的粒子以相同的速率 v 沿同一直线相向运动, 碰撞后生成一个新的粒子, 则新生粒子的质量为()。

A. $2m_0$ B. $2m_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$
C. $\frac{1}{2}m_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ D. $\frac{2m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

选择题解答

1. [解] 本题答案为(B,C)。

真空中的光速是一切有质物质运动速度的极限, 而不是任何速度的极限。静止质量为零的粒子, 例如光子、中微子就是以光速运动的粒子。在介质中, 由于光和物质间的相互作用, 使光在介质中的传播速度小于它在真空真中的传播速度。如果一个粒子在介质中的运动速度大于光在该介质中的传播速度而小于真空中的光速 C , 它将不违背相对论中运动速度极限的结论, 所以这种情况是

可能的。

2. [解] 本题答案为(C)。

由洛伦兹变换 $t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ 和 $x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ 可以求得

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

由此可知,一个惯性系中两个不同地点($x_1 \neq x_2$)的同时事件($t = t$),在另一惯性系中既不同时,也不同地。

3. [解] 本题答案为(C)。

由质速关系和相对论的长度收缩效应可知,当物体以高速 v 运动时,其质量增大而体积减小,所以它的密度 $\rho = \frac{m}{V}$ 增大,即 $\rho > \rho_0$ 。

4. [解] 本题答案为(A)。

$$\Delta t = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{10^{-8}}{\sqrt{1 - (\frac{2 \times 10^8}{3 \times 10^8})^2}}$$
$$\Delta t = \frac{3 \times 10^{-8}}{\sqrt{5}}$$

则该介子在实验室参照系中所能飞行的距离为

$$\Delta x = v\Delta t = 2 \times 10^8 \times \frac{3 \times 10^{-8}}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

5. [解] 本题答案为(B)。

$$E_K = mc^2 - m_0c^2 =$$

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

由此可得

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 = \frac{E_K}{E_0} = \frac{60}{900}$$

由此解得

$$v = 0.35 c$$

6. [解] 本题答案为(D)。

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1.1$$

由此得

$$\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{1}{1.1} = \frac{10}{11}$$

又

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

所以

$$\frac{L}{L_0} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{10}{11}$$

故

$$\frac{L_0 - L}{L_0} = 1 - \frac{L}{L_0} = 1 - \frac{10}{11} = \frac{1}{11}$$

7. [解] 本题答案为(A)。

$$E_0 = m_0c^2 = 36 \times 10^{15}$$

$$m_0 = \frac{36 \times 10^{15}}{c^2} = \frac{36 \times 10^{15}}{(3 \times 10^8)^2} = 0.4 \text{ kg}$$

8. [解] 本题答案为(D)。

由能量守恒定律知

$$\frac{2m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2$$

由此得

$$m = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

二、填空题

1. 狭义相对论的两条基本原理是：

① _____；② _____。

2. 在地球上进行的一场足球赛持续时间为 90min，在以速率 $v = 0.8c$ 飞行的火箭上的乘客观测，这场球赛的持续时间为 _____。

3. 一米尺静止于 K' 系，且与 X' 轴的角为 30° ， K' 系相对于 K 系沿 x 轴正方向的运动速度为 $0.8c$ ，则 K 系中观测到米尺的长度为 $L =$ _____；它与 x 轴的夹角 $\theta =$ _____。（长度、角度的改变）。

4. 边长为 l 的正方形，沿着一棱边方向以高速 v 运动，则该运动正方形的面积为 $S =$ _____（面积的改变）。

5. 一个电子和一个正电子相碰，转化为电磁辐射（这一过程叫作正负电子湮没）。正、负电子的质量皆为 $9.11 \times 10^{-31}\text{kg}$ ，设恰在湮没前两电子是静止的，则电磁辐射的总能量 $E =$ _____。

6. 在一个电视显像管中，电子束中的电子通过电势差约为 $2 \times 10^4\text{V}$ 的电场的加速，因而获得 $2 \times 10^4\text{eV}$ 的能量。则这些快速电子的质量比 $\frac{m}{m_0} =$ _____。

7. 设电子的静止质量为 m_0 ，将一个电子由静止加速到速率为 $0.6c$ ，则需做功 _____。

8. 动能为 1GeV 的质子的动量大小为_____

_____。

填空题解答

1. [解] 光速不变原理; 相对性原理。

$$2. [\text{解}] \Delta t = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1.5}{\sqrt{1 - (\frac{0.8c}{c})^2}}$$

$$\Delta t = \frac{1.5}{\sqrt{0.36}} = 2.5 \text{h}$$

3. [解] 在 k' 系中, 米尺在 x', y' 方向上的投影为

$$l'_x = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$l'_y = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

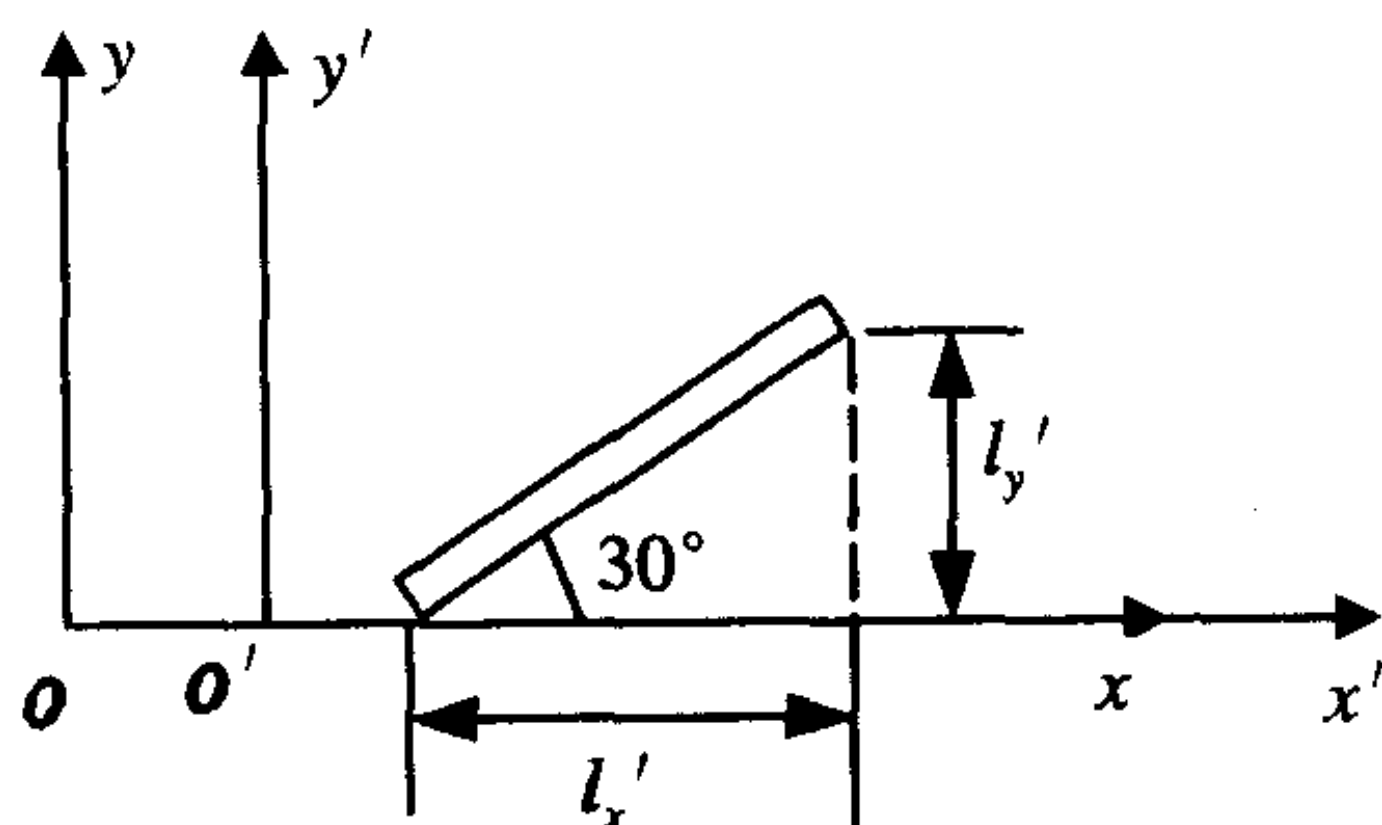


图 13-1

在 k 系中, 米尺在 x, y 方向上的投影为

$$l_x = l'_x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - (\frac{0.8c}{c})^2} = 0.3 \sqrt{3} \text{m}$$

$$l_y = l'_y = 0.5 \text{m}$$

则在 k 系中测得该尺的长度为

$$L = \sqrt{l_x^2 + l_y^2} = \sqrt{(0.3\sqrt{3})^2 + (0.5)^2} = 0.72\text{m}$$

$$\tan\theta = \frac{l_y}{l_x} = \frac{0.5}{0.3\sqrt{3}} = 0.962\ 3$$

$$\theta = 44^\circ$$

$$4. [\text{解}] \quad l_x = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$l_y = l$$

$$S = l_x l_y = l^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

5. [解] 由能量守恒定律得

$$E = 2m_0c^2 = 2 \times 9.11 \times 10^{-31} (3 \times 10^8)^2$$

$$E = 1.64 \times 10^{-13}\text{J}$$

6. [解] 通过电场加速电子所获得的能量为动能。则

$$E_K = mc^2 - m_0c^2 = 2 \times 10^4 \times 1.6 \times 10^{-19}$$

$$mc^2 - m_0c^2 = 3.2 \times 10^{-15}$$

由此得 $\frac{m}{m_0} = 1 + \frac{3.2 \times 10^{-15}}{m_0c^2} =$

$$1 + \frac{3.2 \times 10^{-15}}{9.11 \times 10^{-31} (3 \times 10^8)^2} =$$

$$1 + 0.039$$

$$\frac{m}{m_0} = 1.039$$

7. [解] 外力所作的功转变为电子的动能, 即

$$W = mc^2 - m_0c^2 =$$

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)m_0c^2 =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}} - 1\right)m_0c^2$$

$$W = \left(\frac{1}{0.8} - 1\right)m_0c^2 = 0.25m_0c^2$$

8. [解] 相对论的能量动量关系为

$$E^2 = E_0^2 + P^2C^2$$

由此得 $P^2C^2 = E^2 - E_0^2 = (E - E_0)(E + E_0)$

$$P^2C^2 = E_K(E_K + 2E_0)$$

$$P = \sqrt{2m_0E_K + \frac{E_K^2}{C^2}}$$

而

$$m_0 = 1.67 \times 10^{-27} \text{kg}$$

$$E_K = 1 \times 10^9 \text{eV} = 1 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{J} = 1.6 \times 10^{-10} \text{J}$$

代入数据得 $P = 9.0 \times 10^{-19} \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

三、问答题

1. 在正负电子的湮没过程中,质量守恒吗?

[答] 一个封闭系统的总质量是守恒的,但不是静止质量守恒,而是相对论质量的守恒。正负电子湮没时,产生两个 γ 光子。与正负电子相应的静质量全部转化为光子的动质量($m = E^2/C^2$),总质量是守恒的。

2. 狭义相对论的时空观与经典时空观有什么不同?

[答] 相对论的时空观认为时、空相互联系,时空同运动着的物质不可分割,这就否定了经典力学中时空相互独立的观念。相对论还认为时空度量具有相对性(时间膨胀、长度收缩),这就否定了经典力学中认为时空度量与参照系无关的观念。

四、计算与证明题

1. K' 系以 $v_x = 0.6c$ 相对于 K 系运动,当 K' 系的 O' 点与 K 系的 O 点重合的一瞬间,它们的“钟”均指示零(这两个钟是完全相同的)。试求:

① 若 K' 系中 x' 处发生了一个物理过程, K' 系测得该过程经历了 $\Delta t' = 20\text{s}$,求 K 系的钟测得该过程所经历的时间。

$$[\text{解}] \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}} = \frac{20}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} = 25 \text{ s}$$

② K' 系上有一根长为 $l' = 2\text{m}$ 的细杆,沿 x' 轴放置,求 K 系测得的此杆长度 l 。

$$[\text{解}] \quad l = l' \sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}} = 2 \sqrt{1 - (0.6)^2} = 1.6 \text{ m}$$

③ K' 系上有一质量为 2kg 的物体,求 K' 和 K 系测得该物体的总能量 E' 和 E 。

$$[\text{解}] \quad K' \text{ 系: } E' = m_0 c^2 = 2 \times (3 \times 10^8)^2 = 1.8 \times 10^{17} \text{ J}$$

$$K \text{ 系: } E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}} = \frac{1.8 \times 10^{17}}{0.8}$$

$$E = 2.25 \times 10^{17} \text{ J}$$

2. K' 系以 $v_x = 0.6c$ 相对于 K 系运动,在 K 系中相距 100km 的 x_1 和 x_2 处同时发生的两事件。

① 在 K' 系来看,两事件是否同时发生?

② 在 K' 系中测得这两事件相距多远?

$$[\text{解}] \quad \text{① 由洛伦兹变换得} \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - v_x \frac{\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}}$$

当 $\Delta t = 0, \Delta x = 1 \times 10^5 \text{m}$ 时

$$\Delta t' = \frac{\frac{-0.6c \times 1 \times 10^5}{c^2}}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} = -2.5 \times 10^{-4} \text{s}$$

在 K' 系看来,这两事件不同时。

② 由洛伦兹变换得

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v_x \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}} = \frac{1 \times 10^5 - 0}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} = 1.25 \times 10^5 \text{m}$$

K' 系中测得这两事件相距 $1.25 \times 10^5 \text{m}$ 。

3. 氢弹利用聚变反应。在这反应中,四个氢核聚变成一个氦核,同时以各种辐射形式放出能量。每用 1g 氢,约损失 0.006g 质量。求在这种反应中释放出来的能量与等量的氢被燃烧释放出来的能量的比值。(当被燃烧时,1g 氢放出 $1.3 \times 10^5 \text{J}$ 的能量。液氢、液氧是近代火箭的高能推进剂。)

$$\begin{aligned} [\text{解}] \quad \Delta E = \Delta mc^2 &= 0.006 \times 10^{-3} \times (3 \times 10^8)^2 = \\ &5.4 \times 10^{11} \text{J} \end{aligned}$$

$$\Delta E' = 1.3 \times 10^5 \text{J}$$

$$\text{则} \quad \frac{\Delta E}{\Delta E'} = \frac{5.4 \times 10^{11}}{1.3 \times 10^5} = 4.2 \times 10^6$$

五、附加题

1. 在高能实验室的对撞机中,两束电子以 $v = 0.9c$ 的速度相向运动(而后发生对心碰撞)。试问从与其中一束电子相连结的参照系中的观察者来看,两电子束的相对速度是多少?

[解] 取实验室为 k 系,沿 x 轴负向运动的电子束为 k' 系,沿 x 轴正向运动的电子为运动物体。

$$\text{则} \quad u = -0.9c \quad v_x = 0.9c$$

则由相对论的速度变换关系式得

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{v_x u}{c^2}} = \frac{0.9c - (-0.9c)}{1 - \frac{0.9c \times (-0.9c)}{c^2}}$$

$$v'_x = \frac{1.8c}{1.81} = 0.99c$$

即两束电子的相对速度为 $0.99c$ 。

第14章 量子物理

一、选择题

1. 假设一个光子和一个电子具有相同的波长,则()。
A. 光子具有较大的动量 B. 电子具有较大的动量
C. 电子和光子的动量相等 D. 电子和光子的动量不确定
2. 将波函数在空间各点的振幅同时增大 D 倍,则粒子在空间的几率分布将()。
A. 增大 D^2 倍 B. 增大 $2D$ 倍
C. 增大 D 倍 D. 不变
3. 如图 14-1 所示,在电子波的单缝衍射实验中,缝宽为 a ,缝与屏的距离为 b ,若中央明纹的宽度为 d ,则电子的动量为()
A. $\frac{bh}{2ad}$ B. $\frac{2ah}{bd}$ C. $\frac{2bh}{ad}$ D. $\frac{bh}{ad}$
4. 波长 $\lambda = 600\text{nm}$ 的光沿 x 轴正向传播,若光的波长的不确定量 $\Delta\lambda = 1.5 \times 10^{-4}\text{nm}$,则光子 x 坐标的不确定量至少为()
A. 1.2m B. 2.4m C. 4.8m D. 0.24m
5. 下列材料的功函数(即逸出功)为
A. 铍 —3.9eV B. 钡 —5.0eV
C. 铯 —1.9eV D. 钨 —4.5eV
若要制造能在可见光(频率范围为 $3.9 \times 10^{14} \sim 7.5 \times 10^{14}\text{Hz}$) 下工作的光电管,应选择上述材料中的哪一种?()。
6. 高速运动的电子,其德布罗意波长 λ 与速度 v 有如下关系,其中正确的是()

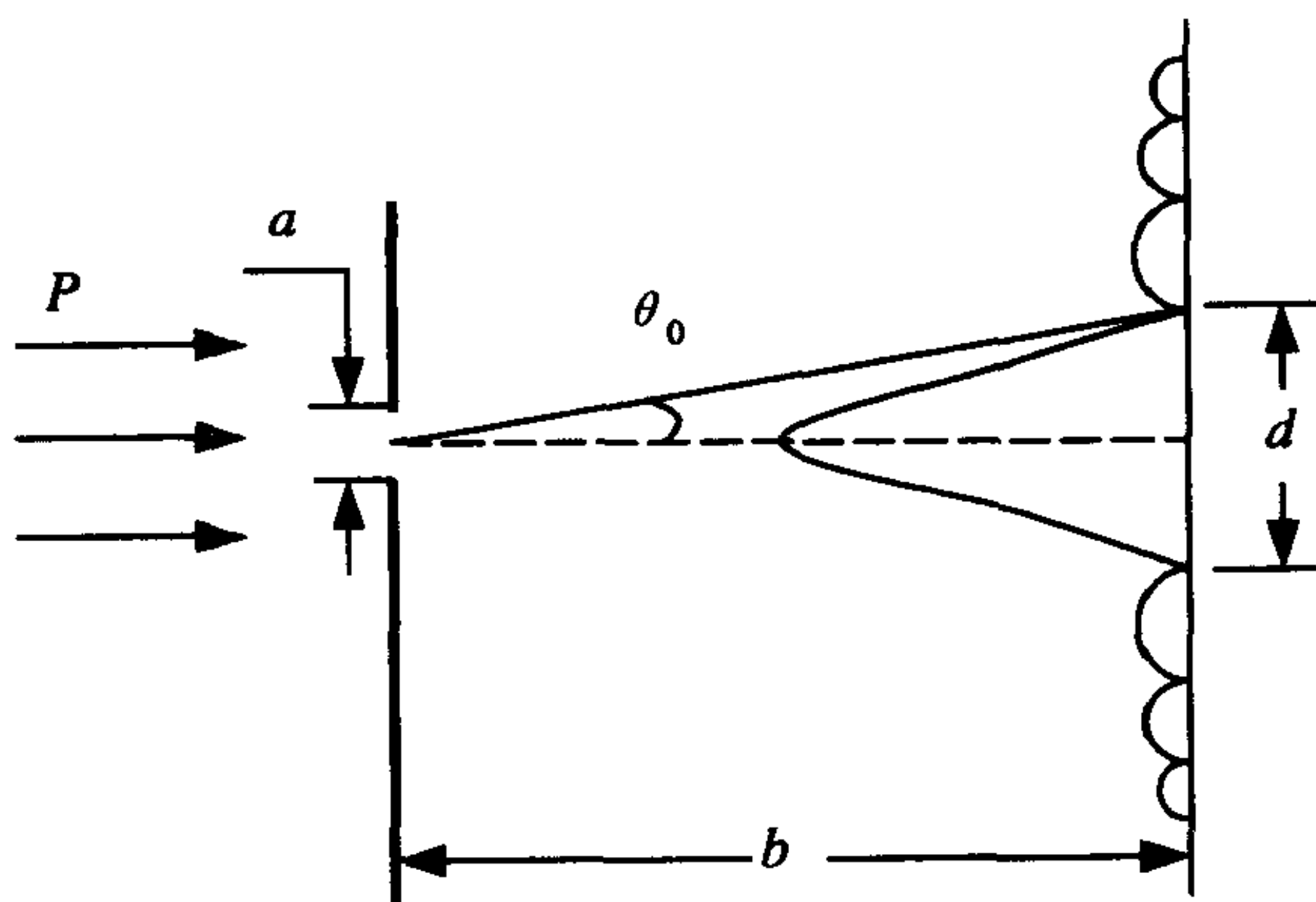


图 14-1

A. $\lambda \propto v$

B. $\lambda \propto \frac{1}{v}$

C. $\lambda \propto \sqrt{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}}$

D. $\lambda \propto c^2 - v^2$

7. 光电效应和康普顿效应都包含电子与光子的相互作用, 仅就光子和电子相互作用而言, 下列说法正确的是()。

A. 两种效应都属于光子和电子的弹性碰撞过程

B. 光电效应是由于金属电子吸收光子而形成光电子, 康普顿效应是由于光子和自由电子弹性碰撞而形成散射光子和反冲电子

C. 两种效应都遵从动量守恒和能量守恒定律

D. 康普顿效应同时遵从动量守恒和能量守恒定律, 而光电效应只遵从能量守恒定律

8. 微观粒子满足不确定关系是由于()。

A. 测量仪器精度不够

B. 粒子具有波粒二象性

C. 粒子线度太小

D. 粒子质量太小

9. 氢原子基态能量为 -13.6 eV , 今以 12.1 eV 的电子轰击处于基态($n = 1$) 的氢原子使其激发, 此激发态对应的主量子数 n

为()。

A. 2 B. 3 C. 4 D. ∞

10. 从能带结构看,下列说法中正确的是()

A. 一般来说,绝缘体的禁带比半导体宽

B. 对金属而言,有的满带与导带重叠,没有禁带。有的虽有禁带,但价带未被电子填满

C. n 型半导体中存在靠近导带的施主能级,其载流子是电子

D. 本征半导体是电子与空穴两种载流子同时参予导电,而杂质半导体(n 型和 P 型)只有一种载流子(电子或空穴)参予导电,所以本征半导体导电性能比杂质半导体好

选择题解答

1. [解] 光子与电子的动量与波长之间的关系相同, $p = \frac{h}{\lambda}$, 若一个光子和一个电子波长相同, 则动量相等。

2. [解] 设 $\psi' = D\psi$, $|\psi'|^2 = D^2|\psi|^2$, 是将空间各点粒子出现的概率密度都增大了 D^2 倍, 这不改变粒子出现概率的相对大小。

3. [解] 根据单缝衍射实验示意图

$$\frac{d}{2} \approx \sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a} \quad (k=1)$$

$$\lambda = \frac{ad}{2b}$$

电子的动量 $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2hb}{ad}$

4. [解] 本题答案为(B)。

光子坐标的不确定量根据 $\Delta x \Delta p_x = h$ 估算。由于 $p = \frac{h}{\lambda}$, 波

入的不确定量 $\Delta\lambda$ 与动量的不确定量 Δp 的关系为 $\Delta p = \frac{h\Delta\lambda}{\lambda^2}$, 代入不确定关系, 光子 x 坐标的不确定量至少为

$$\Delta x = \frac{h}{\Delta p_x} = \frac{h\lambda^2}{h\Delta\lambda} = 2.4\text{m}$$

5. [解] 本题答案为(C)。

当可见光频率为 $\nu_L = 3.9 \times 10^{14}\text{Hz}$, 对应光子的能量为 $h\nu_L$, 当可见光频率为 $7.5 \times 10^{14}\text{Hz}$ 时, 对应光子的能量为 $h\nu_H$ 。在可见光频率范围内, 若以 eV 为单位, 相应光子的能量范围为

$$\frac{h\nu_L}{1.6 \times 10^{-19}} \sim \frac{h\nu_H}{1.6 \times 10^{-19}}$$

代入 h, ν_L, ν_H 的值可得出光子的能量范围为 $1.6\text{eV} \sim 3.1\text{eV}$ 。根据爱因斯坦光电效应方程 $h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + A$, 只有 $h\nu > A$ 时, 光电子才能逸出金属表面, 因此在可见光下工作的光电管中材料的逸出功必须满足条件:

$$1.6\text{eV} > A > 3.1\text{eV}$$

6. [解] 本题答案为(C)。

考虑到相对论效应, 德布罗意波长 λ 与速度的关系为

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \text{ 其中 } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{h}{m_0} \sqrt{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}}$$

7. [解] 本题答案为(B, D)。

光电效应的微观机理是, 当频率为 ν 的光照射金属时, 能量为 $h\nu$ 的光子进入金属表面。金属内的自由电子吸收一个光子, 便获得了 $h\nu$ 的能量, 这能量的一部分消耗于电子从金属表面逸出时所需要的逸出功 A , 另一部分则转变为电子的初动能 $\frac{1}{2}mv_m^2$, 遵从能

量守恒定律。

康普顿效应的微观机理是,具有能量为 $h\nu$ 、动量为 $\frac{h}{\lambda}$ 的光子与静止的自由电子发生弹性碰撞,碰撞过程遵从能量守恒定律和动量守恒定律。碰撞后,光子向某个方向散射,电子发生反冲,入射光子的能量必然要传给反冲电子一部分,使散射光子的能量减少,导致散射光的频率减小,波长变长。

8. [答] 本题答案为(B)。

微观粒子满足不确定关系是微观粒子具有波粒二象性的必然结果,是微观粒子的固有属性之一,是一个客观规律,并不是测量仪器不精确或主观能力上的问题。

9. [解] 本题答案为(B)。

设氢原子全部吸收电子的能量后最高能激发到第 n 个能级,此能级的能量为 $-\frac{13.6}{n^2}\text{eV}$,所以,

$$E_n - E_1 = 13.6 - \frac{13.6}{n^2}$$

将 $E_n - E_1 = 12.1\text{eV}$ 代入上式得

$$n^2 = \frac{13.6}{13.6 - 12.1} = 9.07, n = 3$$

10. [答] 本题答案为(A,B,C)。(略)

二、填空题

1. 根据爱因斯坦的光子理论,每个光子(其频率为 ν , 波长为 $\lambda = c/\nu$) 的能量 $E =$ _____, 动量 $p =$ _____, 质量 $m =$ _____。

2. 在康普顿效应中,波长的偏移 $\Delta\lambda$ 仅与 _____ 有关,而与 _____ 无关。

3. 电子经电场加速,加速电势差为 150V (不考虑相对论效应),其德布罗意波长为 $\lambda =$ _____。

4. 海森堡不确定关系的数学表达式为_____, 今有一电子的位置处于 $x - x + \Delta x$ 之间, 若其位置不确定量为 $\Delta x = 5 \times 10^{-11} \text{m}$, 则其速度不确定量 Δv_x 的数量级为_____ (SI)。

5. 波函数的统计意义是: _____。

6. 激光具有_____等主要特征。激光器发光时, _____辐射处于主导地位。

7. 原子内电子的量子态由 n, l, m_l 及 m_s 四个量子数表征, 当 n, l, m_l 一定时, 不同的量子态数目为_____;

当 n, l 一定时, 不同的量子态数目为_____;

当 n 一定时, 不同的量子态数目为_____。

8. 太阳是以 $1340 \text{ J/m}^2\text{s}^{-1}$ 的辐射率照到垂直于人射线的地球表面上, 假如入射光的平均波长为 $5500 \times 10^{-10} \text{m}$, 单位时间, 单位面积的光子数为_____。

9. 质量为 m , 能量为 E 的粒子处于势能为 U 的势场中, 描述该粒子运动状态的波函数 $\psi(x)$ 所满足的方程为_____, 此方程称为_____方程。

10. 任何激光器都由_____三部分组成。

填空题解答

1. [解] 光子的能量, $E = h\nu$, 动量 $p = \frac{h}{\lambda}$, 光子的质量从质能关系 $E = mc^2$ 求出, $m = \frac{h\nu}{c^2}$

2. [解] 在康普顿效应中, 波长的偏移

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_0c} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

其中, θ 为散射角, h 为普朗克常数, m_0 为电子的静止质量, c 为真空中光速, 可见波长的偏移仅与散射角 θ 有关, 而与入射光波长与散射物质无关。

3. [解] 不考虑相对论效应, 德布罗意波长

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v}$$

由功能关系可知, 电子经电场加速 (加速电势差为 U) 后的速度满足, $\frac{1}{2}m_0 v^2 = eU$, 代入上式

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2em_0}} \frac{1}{\sqrt{U}} = \frac{12.25}{\sqrt{U}} \times 10^{-10} \text{m}$$

当 $U = 150 \text{V}$ 时, $\lambda = 1 \times 10^{-10} \text{m}$

4. [解] 海森堡坐标与动量的不确定关系为

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{2}; \Delta y \Delta p_y \geq \frac{h}{2}; \Delta z \Delta p_z \geq \frac{h}{2}$$

若已知位置的不确定量 Δx , 欲估算速度不确定量 Δv_x 的数量级, 利用 $\Delta x \Delta p_x = h$ 估算。由于 $\Delta p_x = m_e \Delta v_x$, 则 $\Delta v_x = \frac{h}{\Delta x m_e} =$

$$\frac{6.63 \times 10^{-34}}{5 \times 10^{-4} \times 9.1 \times 10^{-31}} = 1.5 \times 10^{-7} \text{ms}^{-1}$$

5. [答] 波函数模的平方 $|\psi|^2 = \psi\psi^*$ (概率密度), 表示粒子在 t 时刻, 在 (x, y, z) 处单位体积内出现的概率。

6. [答] 单色性好, 方向性好, 亮度高, 相干性好。受激

7. [答] 原子内电子的量子态由 n, l, m_l, m_s 四个量子数表征, n —主量子数, $n = 1, 2, 3, \dots$; l —角量子数, $l = 0, 1, 2, \dots (n - 1)$; m_l —磁量子数, $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm l$; m_s —自旋磁量子数, $m_s = \pm \frac{1}{2}$ 。

因此, 当 n, l, m_l 一定时, 不同的量子态数目为 2。

当 n, l 一定时, 不同的量子态数目为 $2(2l + 1)$ 。

当 n 一定时,不同的量子态数目为 $2n^2$ 。

8. [解] 辐射率是指单位时间从单位面积辐射出电磁波的能量。

根据光子理论,光的强度 $I = Nh\nu$,其中 N 为单位时间垂直于光的传播方向单位面积上的光子数。

根据题意,辐射率 = 光的强度,则

$$N = \frac{I}{h\nu} = \frac{I\lambda}{hc} = \frac{1340 \times 5500 \times 10^{-10}}{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} = 3.7 \times 10^{21} \text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$$

9. [答] $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{h^2}(E - U) = 0$, 一维定态薛定谔方程

10. [答] 激活介质,激励能源,光学谐振腔

三、问答题

1. 试简述科学假设在近代物理中的成功作用。

[答] 相对论与量子论是近代物理的两大支柱,而狭义相对论与量子论都是建立在科学假设的基础上的。爱因斯坦提出了狭义相对论的两个基本假设:① 相对性原理;② 光速不变原理。普朗克提出了能量量子化假设。相对论和量子论被认为是 20 世纪物理学对人类最伟大的贡献,在 19 世纪末物理学有两个不解之谜,一个是迈克尔逊—莫雷实验测得顺着地球自转方向的光速与逆着地球自转方向光速完全相同,这一实验结果不服从伽里略相对性原理。另一个是黑体辐射的实验规律无法用经典理论解释。以爱因斯坦的狭义相对论的两个基本假设为依据,成功地解释了迈克尔逊—莫雷实验。以普朗克的量子假设为依据,推导出的普朗克公式与黑体辐射的实验规律完全符合。还有爱因斯坦的光量子假设,成功地解释了光电效应的实验规律;在德布罗意物质波假设的基础上,薛定谔提出了薛定谔方程,后来在短短的几年时间内就建立了一套与经典理论迥然不同的量子力学理论,奠定了现代物理学的

基础。

科学的假设在近代物理学中的成功作用,显示出科学假设是创新思维的重要方法之一。

四、计算题与证明

1. 粒子在宽为 a 的一维无限深势阱中运动,其波函数为

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{3\pi x}{a} \quad (0 < x < a)$$

试求概率密度的表达式和粒子出现的概率最大的各个位置。

[解]

$$|\psi(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{3\pi x}{a} \quad (0 < x < a)$$

$$|\psi(x)|^2 \text{ 最大, } \sin^2 \frac{3\pi x}{a} = 1$$

则
$$\frac{3\pi x}{a} = (2k+1) \frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2$$

$$x = \frac{a}{6}, \frac{a}{2}, \frac{5a}{6} \text{ 为 } |\psi(x)|^2 \text{ 最大的位置。}$$

2. 试证:若确定一个运动粒子的位置时,其不确定量等于该粒子的德布罗意波长,则同时确定该粒子的速度时,其不确定量就等于该粒子的速度。

[证]
$$\Delta x = \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

由不确定关系式 $\Delta x \Delta p_x = h$

$$\frac{h}{mv} m \Delta v = h$$

所以
$$\Delta v = v$$

3. 一台显微镜可达到的最高分辨本领只受所用的波长限制,即能被分开的最小距离约等于波长。假定我们要“看”一个原子内部,若原子的直径为 $1 \times 10^{-10} \text{m}$,这表示我们要分辨隔开最小距离

约 $1 \times 10^{-11} \text{m}$ 。

问：① 如用电子显微镜所需电子的最小动能是多少？

② 如用光学显微镜所需光子的最小能量是多少？

③ 为了这个目的，哪一种显微镜比较实用？为什么？

〔解〕 由题意 $\lambda = 1 \times 10^{-10} \text{m}$

① 电子最小动能
$$E_{K_{\min}} = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2}{2m_e}$$

代入： $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s} = 4.135 \times 10^{-15} \text{eV} \cdot \text{s}$ (因为 $1 \text{eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{J}$)

$$m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{kg}$$

$$E_{K_{\min}} = 2.41 \times 10^{-15} \text{J} = 1.51 \times 10^4 \text{eV}$$

② 光子最小能量

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda} = 19.89 \times 10^{-15} \text{J} = 12.4 \times 10^4 \text{eV}$$

属于电磁波谱 γ 射线范围。

③ 电子显微镜比较实用。根据 $E_{K_{\min}} = \frac{1}{2} m_e v^2 = eU$

可求出加速电势差 $U = 1.51 \times 10^4 \text{V}$ ，这是不难实现的。

五、附加题

1. 一维无限深势阱中粒子的波函数为 $\psi(x)$ ，在势阱边界处 $\psi(x) = 0$ 。因此，这种定态物质波相当于两端固定的弦中的稳定驻波，因而势阱宽度 a 与粒子的德布罗意波长之间必然存在如下关系：

$$a = n \frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, \dots$$

根据以上联想，试导出粒子的能量量子化公式

$$E_n = \frac{h^2}{8ma^2} n^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

[解] 因为 $a = n \frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, \dots$

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$E = E_K = \frac{p^2}{2m}$$

可得
$$E = \frac{h^2}{8ma^2} n^2$$

2. 若光子和电子(静止质量 m_e) 的能量都为 E , 证明光子的波长 $\lambda_{\text{光}}$ 与电子的波长 $\lambda_{\text{电}}$ 之比为

$$\frac{\lambda_{\text{光}}}{\lambda_{\text{电}}} = \sqrt{1 - \frac{m_e^2 c^4}{E^2}}$$

[证] 能量和动量的相对论关系式为 $E^2 = p^2 c^2 + E_0^2$

光子: $E = \frac{hc}{\lambda_{\text{光}}}, \lambda_{\text{光}} = \frac{hc}{E}$

电子: $E^2 = \frac{h^2}{\lambda_{\text{电}}^2} c^2 + m_e^2 c^4, \lambda_{\text{电}} = \sqrt{\frac{h^2 c^2}{E^2 - m_e^2 c^4}}$

所以
$$\frac{\lambda_{\text{光}}}{\lambda_{\text{电}}} = \sqrt{\frac{h^2 c^2}{E^2} \cdot \frac{E^2 - m_e^2 c^4}{h^2 c^2}} = \sqrt{1 - \frac{m_e^2 c^4}{E^2}}$$

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名 = 大学物理教学同步练习题及详解

作者 = 王济民等编

页数 = 2 2 6

S S 号 = 1 0 9 0 6 4 3 4

出版日期 = 2 0 0 1 年

前言

目录

第 1 章	质点运动学
第 2 章	质点动力学
第 3 章	刚体力学基础
第 4 章	真空中的静电场
第 5 章	静电场中的导体和电介质
第 6 章	恒定电流的磁场
第 7 章	电磁感应与电磁场
第 8 章	气体动理论
第 9 章	热力学
第 1 0 章	振动
第 1 1 章	波动
第 1 2 章	波动光学
第 1 3 章	狭义相对论
第 1 4 章	量子物理