

看了那么多书，想写下一些东西供后人参考，在这个上面花太多时间了，不太值得，写出来了却一番心结。本文主要探讨变分原理。变分主要是对不确定部分进行变分。假如你有区间 $[a, b]$ 上的 x ，有 $g(x)=x$ ，是不需要变分的。

$$I = \int_1^2 y(x) dx \quad (1)$$

对于这个式子，我们给定不同的 y ，会得到不同的值。我们有理由把 I 看成关于 y 的函数。你是否同意？在这个基础上， $y = 2x$ 或者 $y = \sin(x)$ ，会得到不同的值，这也证明了这一观点，把 I 看成关于 y 的函数。

我们对这个模型进行一下抽象处理，可以得到：

$$J[y] = \int_a^b F(x, y) dx$$

它也可以看成关于 y 的函数。输入一个 y ，得到一个 $J[y]$ 。对于一个正常的函数，我们通常要研究它的极值点。对于这种函数，是不是也不例外呢。我们该如何求它的极值，以及 y 与 x 之间的映射关系为什么的时候取得极值点。（我们定义出来的等式，是关于 x 的积分。 y 应该取与 x 的一个映射关系，这样才有研究的意义。）

我们来回顾一下函数极值的定义吧。以极小值为例子（我们常见的也是极小值。）。假如 $J[y_0]$ 取得极小值。那么有任意的 y ，有 $J[y] > J[y_0]$ 。

下面我们对于一般的 y ，定义 $\delta y = y - y_0$ ，来衡量它们两个映射关系之间的接近程度。嘻嘻，只是到这里还是不行哟。因为函数都是在一个区间上的，你这样定义出来的东西是在一个区间上的吗？那么我们考虑我们的函数 y ，都定义在区间 $[a, b]$ 上，然后定义 $d_0 = \max_{x \in [a, b]} |y(x) - y(x_0)|$ 。

只是衡量原函数够吗？应该是不够的，我们接下来定义下它们导数直接的距离吧， $d_1 = \max_{x \in [a, b]} |y(x)^{(1)} - y(x_0)^{(1)}|$ 。以此类推，我们可以定义它们的 n 阶导数之间的距离 $d_n = \max_{x \in [a, b]} |y(x)^{(n)} - y(x_0)^{(n)}|$ （不过也用不到太多啦）接下来，我们来研究下 $\Delta J[y]$ 。

$$\Delta J = J[y] - J[y_0] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx - \int_a^b F(x, y_0(x), y'_0(x)) dx$$

（这里注意， y_0 并不是一个数字，而是一个给定的映射关系。）

把上面的算式进一步带入定义好的变量，如 $\delta y = y - y_0$ ：

$$\begin{aligned}\Delta J &= \int_a^b F(x, y_0(x) + \delta y, y'_0(x) + (\delta y)') dx - \int_a^b F(x, y_0(x), y'_0(x)) dx \\ &= \int_a^b \left[F(x, y_0(x) + \delta y, y'_0(x) + (\delta y)') - F(x, y_0(x), y'_0(x)) \right] dx \quad (2)\end{aligned}$$

$F(x, u + \Delta u, v + \Delta v) - F(x, u, v)$ 我们对它采用拉格朗日中值定理，这样总是可以的吧。的确可以。 $\Delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial F}{\partial v} \Delta v + o(\rho)$ 当 $\rho \rightarrow 0$ 这个是不是和我们来定义微分的时候很像呢？我们是否可以采用取得线性部分的方法来再次定义泛函里面的概念呢？那么我们来思考下，什么时候这个式子可以变成上面的那种奇奇怪怪的东西呢。这个东西的推导，要求 $\Delta u, \Delta v$ 可以趋近于 0。那么我们规定 d_0, d_1 都可以趋近于 0

如果我们说关于 $J[y]$ 的变分存在，那么 $J[y + \delta y] - J[y] = A * \delta y + o(\delta y)$ 。这里的定义是取任意一个对于 y 的微小扰动，都是成立的。可是这个定义用起来很复杂。接下来我们采用拉格朗日定义出来的东西，来进一步说明泛函取极值时候的性质。拉格朗日有以下定义，如果泛函的变分存在，那么我们取定一个扰动 $\delta y = \sin(x)$ 等一下啊，哥们你这也太大了吧。嗯，接下来我们取一个可以趋近于 0 的数 λ ，那么 $\lambda * \delta y$ ，是不是就趋于一个微小扰动了呢？

$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J[y_0 + \lambda \delta y] - J[y_0]}{\lambda} = \delta J[y]$ 我们这样就可以知道在某一个映射 y_0 处的变分怎么计算了。

对于 $J[y + \delta y \cdot \lambda]$ ，我们可以把它看成关于 λ 的函数 $\Phi(\lambda)$ ，假如这个函数在 y_0 处取得极值。那么我们是不是可以认为它在 0 处的导数为 0。即 $\Phi(\lambda)' = 0$ 。因此，一个泛函取得极值的时候，它关于 δy 的线性项为 0。