

我想,我们需要进行一些证明了。当函数的变分存在的时候,那么拉格朗日形式定义出来的变分和原来的等价吗?我们进行的操作合理吗?你说的利用拉格朗日形式很好进行运算,你告诉我们运算规则了嘛?你不是在忽悠我们吧。

别,你们别打我。疼死了。我马上进行证明

当 $\delta J = \delta y \cdot A$ 存在时, 请证明 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J[y_0 + \lambda \delta y] - J[y_0]}{\lambda} = \delta J$

由题目所给的条件, $\Delta J = \delta J + o(\delta y)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J[y_0 + \lambda \delta y] - J[y_0]}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta J}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{A \cdot \lambda \delta y + o(\lambda \delta y)}{\lambda} = A \cdot \delta y$$

看吧,我没有在忽悠你们

假如我们知道在给定的区间上,泛函一定可以取到极值,将取到极值时候的映射关系记录为 y_0

记 $y = y_0(x) + \lambda \cdot \eta(x)$

$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J[y_0 + \lambda \delta y] - J[y_0]}{\lambda} = \delta J[y]$ 这个式子相当于 $J[x, y, y']$ 对 λ 求偏导。

$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \lambda} \right) dx$ (在一定条件下,积分和求导可以交换次序。这个以后再证明)

由于 x 给定,不显含 λ , 故 $\frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0$

$$\begin{aligned}
\delta J &= \frac{\partial}{\partial \lambda} J[y + \lambda \eta] \Big|_{\lambda=0} \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx \\
&= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \eta dx + \underbrace{\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx}_{\text{分部积分}} \\
&= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \eta dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right]_a^b
\end{aligned}$$

由于边界条件 $\eta(a) = \eta(b) = 0$ 且 $\eta(x)$ 任意，得到：

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0}$$

这是基于拉格朗日形式的变分推导出来的结果。当然这个公式以及足够解决大部分问题。再复杂的情况是往上面添加约束条件。对于假如 F 里面含有 y'' 之类的，太过于复杂了，而且使用的价值也不是很大。

可是这不对劲啊，聪明的你一定发现了哪里出了问题，我们上一篇内容都一直在讲变分 δy ，可是现在呢？现在我们在干些什么，我们居然用 $\eta(x)$ 了，我们难道背叛了我们之前所说的事情吗？实则不然，我们把 $\eta(x)$ 换成 δy 不就可以了吗？(有一点很重要，对于先变分得到的含 $\delta(y), \delta y', \delta y''$ 一定要去分部积分，直到不可能再出现 δy 为止，也就是说，找出所有可能的含 δy 项加在一起)

这样我们就有了一般变分的规则，对于 δJ ，我们对被积函数 F ，进行关于 y, y' 的偏导运算，然后分别乘以 $\delta y, \delta y'$ ，最后的话把它们加起来再进行积分。这和导数的运算法则很相似，但是又有所不同，我们要格外注意。这样，我们连拉格朗日定义的变分都可以丢掉了，只用记住这一种运算法则就可以了。

我们进行这样的运算，然后关于 δy 的线性项为 0。这样我们就获得了关于 y 的微分方程，这样的 y 就是使得泛函取得极小值的映射关系。

在分析力学书上，那些老先生和新先生们说所的无关，其实啊，就是把 y, y' 看成 u, v 分别进行偏导运算，不显含的话就为 0。不用花那么多笔墨去写一会儿有关的，一会儿无关的。太令人糊涂了。

据说啊，变分法得到的这个欧拉拉格朗日方程，能够解决一个定长的绳子，首尾相连放在一个平面上，当所围面积最大的时候，围成了一个什么图形。嘻嘻嘻嘻

在多本书里面都提到了， $(\delta y)' = \delta y'$ ，这个东西的用处，在处理 y'', y''' 之类的时候用处会更大，仅仅是一阶导数的话用处不是很大。